50C
7130

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

167

Exchange

October 9, 1908.

167

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME V.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez WILLIAMS et NORGATE,	chez HERMANN, libraire,	chez FRIEDLÄNDER u. Sohn,
Henrietta Str., 14.	rue de la Sorbonne, 8.	Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112

JANVIER 1904.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Ag 3/14

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME V.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez Williams et Norgate,	chez Hermann, libraire,	chez Friedländer u. Sohn,
Henrietta Str., 14.	rue de la Sorbonne, 8.	Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112.

JANVIER 1904.

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME V.

1. Sur la représentation géométrique dans l'espace des formes quadratiques et cubiques binaires; par J. Fairon.

2. Prodrome de la théorie mécanique de l'électricité; par P. De Heen.

3. Anomalies dans la déclinaison magnétique aux environs de Liége; par M. Dehalu.

4. Un lieu de géométrie sphérique démontré par les projections stéréographiques; par G. Cesàro.

5. Aire du triangle formé sur la sphère par trois cercles quelconques; par G. Cesàro.

6. Sur la formule de la milarite, du leucophane et de quelques minéraux voisins; par G. Cesàro.

7. Sur un nouveau curvigraphe; par Victor Lebeau. — Sur les lignes tracées par le curvigraphe Victor Lebeau; par J. Neuberg.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

(JANVIER 1904).

Bureau.

Président,	M. J. Fraipont.
Vice-Président,	» H. Lonay.
Secrétaire général,	» C. le Paige.
Bibliothécaire,	» J. Deruyts.
Trésorier,	» J. Fairon.

Membres effectifs.

1855 Dewalque, G., professeur émérite à l'université de Liége, membre de l'Académie royale de Belgique.

1860 Gillon, A., professeur émérite à l'université.

1870 Masius, V., professeur émérite à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1871 Van Beneden, Éd., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1874 Firket, Ad., chargé de cours à l'université, inspecteur général au corps des mines.

1878 LE PAIGE, C., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1879 JORISSEN, A., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1880 NEUBERG, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1881 FRAIPONT, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1884 DERUYTS, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

UBAGHS, P., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

1885 GRAVIS, A., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1887 LOHEST, M., professeur à l'université.

DE HEEN, P., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1890 BEAUPAIN, J., docteur en sciences, ingénieur principal au corps des mines.

1897 CESÀRO, G., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1898 HUBERT, H., professeur à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.

1900 LONAY, H., docteur en sciences, assistant à l'université.

1902 DEHALU, M., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

FAIRON, J., docteur en sciences, répétiteur à l'université

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1853 Bède, Em., industriel, à Bruxelles.

1855 Liais, ancien directeur de l'Observatoire de Rio de Janeiro.

1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.
De Colnet d'Huart, conseiller d'État, à Luxembourg.
Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.
Folie, F., directeur honoraire de l'Observatoire royal de Bruxelles.

1866 Ledent, directeur de l'École des textiles de Verviers.

1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York.

1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.

1871 Henry, L., professeur à l'université de Louvain.
Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.

1872 Vallès, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.
Garibaldi, professeur à l'université de Gênes.
Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg.

1875 Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.

1875 Mansion, P., professeur à l'université de Gand.
Michaelis, O., captain, chief of Ordnance, à Saint-Paul, Minn., département de Dakota (États-Unis).
Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.

1876 Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.

1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.

1879 Czuber, professeur, à Prague.

1880 Van der Mensbrugghe, Gustave, professeur à l'université de Gand.

De Tilly, J., lieutenant général, membre de l'Académie royale de Belgique, à Bruxelles.

1881 Sébert, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.

Angot, A., attaché au bureau central météorologique de France, à Paris.

Wiedemann, G., professeur à l'université de Leipzig.

Kohlrausch, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.

Quincke, professeur à l'université d'Heidelberg.

Laisant, C.-A., à Paris.

1882 Mascart, membre de l'Institut, à Paris.

1883 Mittag-Leffler, G., professeur à l'université de Stockholm.

Gomès Teixeira, F., ancien professeur à l'université de Coïmbre.

1885 Schur, Fréd., professeur à l'université de Dorpat.

Picquet, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.

de Longchamps (Gohierre), professeur au lycée Charlemagne, à Paris.

Vaněček, J. S., professeur, à Jičin (Bohême).

Cesàro, E., professeur à l'université, à Naples.

1887 Walras, L., professeur à l'Académie de Lausanne.

Guccia, professeur à l'université de Palerme.

Wullner, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle.

Paalzow, directeur de l'École technique de Berlin.

1888 Ocagne (Maurice d'), professeur à l'École des ponts et chaussées, à Paris.

1898 Gordan, P., professeur à l'université d'Erlangen.

1898 Korteweg, D.-J., professeur à l'université d'Amsterdam.
Lampe, Em., directeur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, professeur à Berlin.
Mathias, Em., professeur à l'université de Toulouse.
Brocard, H., ancien officier du génie, à Bar-le-Duc.
1902 Versluys, W.-A., docteur en sciences, à Delft.

II. — Sciences naturelles.

1854 Drouët, H., naturaliste, à Dijon.
Lucas, H., aide-naturaliste au Museum d'histoire naturelle, à Paris.
1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.
1865 Le Jolis, archiviste perpétuel de la Société des sciences naturelles de Cherbourg.
De Borre, A., ancien conservateur au Musée royal d'histoire naturelle de Bruxelles, à Genève.
1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.
1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille.
Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.
1870 Malaise, C., professeur émérite à l'Institut agronomique de Gembloux.
1871 Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.
1873 Clos, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.
Glaziou, botaniste, à Rio de Janeiro.
De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.
Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.
Areschoug, professeur adjoint à l'université de Lund.

1874 Gegenbauer, professeur à l'université de Heidelberg.
Häckel, professeur à l'université de Iéna.
Waldeyer, professeur à l'université de Berlin.

1875 Eimer, professeur à l'université de Tubingue.
De la Valette Saint-George, professeur à l'université de Bonn.
Ray-Lankester, professeur à l'université de Londres.
Packard, professeur à l'université de Salem.
Flemming, W., professeur à l'université de Kiel.
Plateau, F., professeur à l'université de Gand.

1876 Balfour, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.

1877 Mac Lachlan, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1878 Hertwig, R., professeur à l'université de Munich.
Strasburger, professeur à l'université de Bonn.
Brongniart, Charles, à Paris.

1879 Wetterby, professeur à l'université de Cincinnati.
Bolivar, I., professeur, à Madrid.
Ritsema, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.

1881 Taramelli, professeur à l'université de Pavie.
Gestro, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gênes.
Salvadori (comte Th.), professeur à l'université de Turin.

1883 Hull, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.

1884 Trinchese, professeur à l'université de Naples.

1898 Agassiz, Alexandre, à Cambridge (Mass.).
Bertrand, C.-E., professeur de botanique à la Faculté des sciences de Lille.
Blanchard, Raphaël, assistant au Museum d'histoire naturelle, à Paris.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Société belge de microscopie.
Musée royal d'histoire naturelle.

Liége. — *Société géologique.*

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis,* directeurs : MM. P. Mansion et J. Neuberg.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, directeur : M. Lampe (Kurfürstenstr., 139).

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Naturforschende Gesellschaft.
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königliche bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stettin. — *Entomologischer Verein.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE.

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

Cracovie. — *Académie des sciences.*

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.
Ceske Akademie Cisare Frantiska Josepha.

Trieste. — *Società adriatica di Scienzi naturali.*

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.
Monatshefte für Mathematik und Physik, rédacteurs : MM. Escherich et Gegenbauer, professeurs à l'université.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*
Université.

Lyon. — *Académie des sciences.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.
Université.

Marseille. — *Faculté des Sciences.*

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Nantes. — *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France.*

Paris. — *Société Philomatique.*
Muséum d'histoire naturelle.
Société mathématique de France.
École polytechnique.

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Société des sciences physiques et naturelles.
Faculté des Sciences.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*
Mathematical Society.

Glasgow. — *Geological Society.*
Natural history Society.
Philosophical Society.

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze.*

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Florence. — *Institut supérieur.*

Gênes. — *Osservatorio della R. Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Societa di scienze naturali e economiche.*
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*
Nuovo Cimento, rédacteurs : MM. Felici, Batelli et Volterra.

Rome. — *Reale Accademia dei Lincei.*
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.

Turin. — *Reale Academia delle Scienze.*

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*
Société botanique du grand-duché de Luxembourg.

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*
Société mathématique.

Delft. — *École polytechnique.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*
Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

PORTUGAL.

Coïmbre. — *Journal des sciences mathématiques et astronomiques,* rédacteur : M. Gomès Teixeira.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*
Kazan. — *Société physico-mathématique.*

Kharkoff. — *Société mathématique.*

Juriew. — *Université.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*
Archives des sciences biologiques.
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.

SUÈDE ET NORVÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*

Göteborg. — *Kongl. Vetenskaps och Vitterhetssamhälle.*

Stavanger. — *Museum.*

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Nordist medicinskt Arkiv, directeur : Dr Axel Key.
Entomologiska föreningen, 94, Drottninggatan.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.

Throndhjem. — *K. Norske Videnskabers Selskabs.*

Upsal. — *Société royale des Sciences.*

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik :* Drs Juel et Foldberg (Romersgade, 9).
Académie royale des sciences.

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Neuchâtel. — *Societé des sciences naturelles.*

Schaffhouse. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Zurich. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMERIQUE.

ÉTATS-UNIS.

Austin. — *Texas Academy of sciences.*
Baltimore. — *American Journal of mathematics. (Johns Hopkins University.)*
Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.
Halifax. — *Nova Scotian Institute of Natural Science.*
Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*
New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*
New-York. — *Academy of sciences.*
Museum of natural history.
American Mathematical Society.
Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner Free Institute of sciences.
Portland. — *Natural History Society.*
Rochester. — *Academy of sciences.*
Saint-Louis, Mo. — *Botanical Garden.*
Salem. — *Essex Institute.*
American Association for advancement of sciences.
San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*
Washington. — *Smithsonian Institution.*
American Monthly Microscopical Journal.

CANADA.

Ottawa. — *Geological Survey of Canada.*
Commission de géologie et d'histoire naturelle du Canada.
Toronto. — *Canadian Institute.*

CHILI.

Santiago. — *Société scientifique du Chili.*

MEXIQUE.

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

ASIE.

—

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

SIBÉRIE.

Irkutsk. — *Ostsibirische Abtheilung der K. Russischen geographischen Gesellschaft.*

AUSTRALIE.

Adelaïde. — *Australian Association for advancement of science.*
Royal Society of South Australia.

Hobart-Town. — *Tasmanian Society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Linnean Society.*
Royal Society of New South Wales.

SUR

LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

DANS L'ESPACE

DES

FORMES QUADRATIQUES ET CUBIQUES BINAIRES

PAR

Joseph FAIRON

RÉPÉTITEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

SUR

LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

DANS L'ESPACE

DES

FORMES QUADRATIQUES ET CUBIQUES BINAIRES

§ I. — Systèmes fondamentaux des formes quadratiques et cubiques binaires.

Dans un travail précédent publié par la Société royale des sciences de Liége (*), nous avons recherché l'interprétation des fonctions invariantes des formes binaires dans la géométrie du plan.

Nous nous sommes proposé de faire une étude analogue en prenant pour base la cubique gauche.

Nos recherches étaient terminées, lorsque nous avons eu connaissance des travaux de MM. R. Sturm (**) et E. d'Ovidio (***). Notre manière de procéder diffère entièrement de la méthode de ces savants géomètres. Toutefois, nous nous sommes dispensé de reproduire certains résultats qu'ils ont obtenus.

(*) *Sur un système de représentation géométrique des formes algébriques binaires* (Mém. de la Soc. roy. des sciences de Liége, 1901, 3e sér., t. III).

(**) *Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve* (Journal de Crelle, 1879, vol. LXXXVI).

(***) *Studio sulle cubiche Gobbe mediante la Notazione simbolica delle Forme binarie* (Memorie della reale Accademia della scienze di Torino, 1879, série II, t. XXXII).

Nous considérons la cubique gauche C_3 comme étant l'intersection de deux cônes du second ordre ayant une génératrice commune. Cette courbe peut être représentée analytiquement par deux des équations

$$\begin{aligned} z_1z_3 - z_2^2 &= 0, \\ z_2z_4 - z_3^2 &= 0, \\ z_1z_4 - z_2z_3 &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit les équations paramétriques :

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1. \qquad (1)$$

Un point de C_3 est déterminé par la valeur du paramètre λ en ce point. Nous supposerons que les racines μ_1, μ_2 et λ_1, λ_2, λ_3 des équations obtenues en égalant à zéro les formes binaires

$$f_2 = b_0x_1^2 + 2b_1x_1x_2 + b_2x_2^2 \equiv b_x^2, \quad f_3 = a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3 \equiv a_x^3$$

sont les paramètres de points de la cubique gauche. Ces racines satisfont aux relations :

$$\mu_1 + \mu_2 = -\frac{2b_1}{b_0}, \quad \mu_1\mu_2 = \frac{b_2}{b_0}; \qquad (2)$$

$$\Sigma\lambda_1 = -\frac{3a_1}{a_0}, \quad \Sigma\lambda_1\lambda_2 = \frac{3a_2}{a_0}, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\frac{a_3}{a_0}. \qquad (3)$$

1. L'équation du plan coupant C_3 aux points de paramètres λ_1, λ_2, λ_3 est

$$z_1 - z_2\Sigma\lambda_1 + z_3\Sigma\lambda_1\lambda_2 - z_4\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0;$$

ou, par les égalités (3),

$$a_0z_1 + 3a_1z_2 + 3a_2z_3 + a_3z_4 = 0. \qquad (4)$$

On voit que cette équation se déduit de

$$f_3 \equiv a_x^3 = 0$$

par la substitution

$$x_1^3 : x_1^2x_2 : x_1x_2^2 : x_2^3 = z_1 : z_2 : z_3 : z_4. \qquad (5)$$

Par cette substitution, on pourra, en général, faire correspondre à une forme binaire d'ordre $3n$ une surface d'ordre n, laquelle rencontrera la cubique gauche en $3n$ points dont les paramètres sont les racines de la forme considérée.

Le plan osculateur au point de paramètre λ_i de $\mathcal{C}_3$ a pour équation

$$z_1 - 3z_2\lambda_i + 3z_3\lambda_i^2 - z_4\lambda_i^3 = 0.$$

On trouve facilement les coordonnées du point d'intersection des plans osculateurs aux points racines de f_3 ; ce sont :

$$\frac{z_1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{3z_2}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1} = \frac{3z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{z_4}{1},$$

ou bien, par les égalités (3),

$$-\frac{z_1}{a_3} = \frac{z_2}{a_2} = -\frac{z_3}{a_1} = \frac{z_4}{a_0}. \tag{6}$$

Ce point est situé dans le plan (4) ; c'est le foyer de ce plan.

Donc, *à toute forme cubique* f_3 *on peut faire correspondre, par la substitution* (5), *un plan et par les formules* (6), *un point de l'espace, foyer de ce plan. Ce plan rencontre la courbe aux points dont les paramètres sont racines de cette forme; ces mêmes points sont déterminés par les plans osculateurs menés à la cubique gauche par le foyer du plan.*

Nous appellerons le plan (4) et le point (6) respectivement *plan focal* et *foyer de la forme* f_3.

2. On sait que, par tout point de l'espace, il passe une seule bisécante (réelle ou imaginaire) à une cubique gauche. Si la bisécante

$$\left.\begin{aligned} z_1 - z_2(\lambda + \mu) + z_3\lambda\mu &= 0, \\ z_2 - z_3(\lambda + \mu) + z_4\lambda\mu &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

passe par le foyer de f_3, on a les conditions :

$$\begin{aligned} a_3 + a_2(\lambda + \mu) + a_1\lambda\mu &= 0, \\ a_2 + a_1(\lambda + \mu) + a_0\lambda\mu &= 0. \end{aligned}$$

Celles-ci donnent

$$\frac{\lambda\mu}{a_0a_2 - a_1^2} = \frac{\lambda + \mu}{-(a_0a_3 - a_1a_2)} = \frac{1}{a_1a_3 - a_2^2}, \tag{8}$$

formules montrant que les paramètres des points d'intersection de la bisécante et de C_3 sont racines de la forme

$$H_3 = (a_0a_2 - a_1^2)x_1^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)x_1x_2 + (a_1a_3 - a_2^2)x_2^2,$$

hessien de f_3.

L'élimination de λ et μ entre les relations (7) et (8) donne les équations de la *bisécante hessienne* de f_3 :

$$\left.\begin{aligned} z_1(a_0a_2 - a_1^2) + z_2(a_0a_3 - a_1a_2) + z_3(a_1a_3 - a_2^2) = 0, \\ z_2(a_0a_2 - a_1^2) + z_3(a_0a_3 - a_1a_2) + z_4(a_1a_3 - a_2^2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Donc, *au hessien* H_3 *de la forme* f_3 *correspond une bisécante de la cubique gauche, rencontrant cette courbe aux points dont les paramètres sont racines de l'équation* $H_3 = 0$. *Cette droite est la bisécante que l'on peut mener à* C_3 *par le foyer de la forme* f_3. *On en obtient les équations en multipliant le hessien successivement par* x_1 *et* x_2, *puis en faisant, dans les résultats, la substitution* (5).

D'après cela, *à toute forme quadratique* $f_2 \equiv b_x^2$ *correspond une bisécante de la cubique gauche.* Cette bisécante, représentée par les équations

$$\left.\begin{aligned} b_0z_1 + 2b_1z_2 + b_2z_3 = 0, \\ b_0z_2 + 2b_1z_3 + b_2z_4 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

rencontre C_2 aux points racines de $f_2 = 0$. Les plans osculateurs en ces points déterminent la droite réciproque de la bisécante. Cette réciproque a pour équations :

$$\left.\begin{aligned} z_1(4b_1^2 - b_0b_2) + 6z_2b_1b_2 + 3z_3b_2^2 = 0, \\ 3z_2b_0^2 + 6z_3b_0b_1 + z_4(4b_1^2 - b_0b_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Lorsque l'invariant $\Delta = 2(b_0b_2 - b_1^2)$ est nul, les équations (11) se ramènent à (10), les deux droites coïncident. Cela est évident, puisque $\Delta = 0$ indique que les racines de $f_2 = 0$ sont égales et que, par suite, la bisécante f_2 devient tangente.

3. La développable circonscrite à la cubique gauche a pour équation :

$$(z_1z_4 - z_2z_3)^2 - 4(z_1z_3 - z_2^2)(z_2z_4 - z_3^2) = 0. \qquad (12)$$

La condition pour que le foyer de f_3 soit sur cette surface est :

$$R = (a_0a_3 - a_1a_2)^2 - 4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) = 0.$$

Donc, *lorsque l'invariant* R *de* f_3 *est nul, le foyer de cette forme est sur une tangente à la cubique support.* D'ailleurs, $R = 0$ exprime que les racines du hessien de f_3 sont égales et que la bisécante hessienne est tangente à C_3. Cette représentation géométrique montre qu'une des racines de $f_3 = 0$ est la racine double de $H_3 = 0$.

4. Projetons les points de C_3 au moyen de deux faisceaux de plans ayant pour axes les tangentes aux points dont les paramètres sont les racines μ_1 et μ_2 de la forme $f_2 = b_x^2$. Ces faisceaux ont pour équations :

$$(z_1 - 2z_2\mu_i + z_3\mu_i^2) - \theta'(z_2 - 2z_3\mu_i + z_4\mu_i^2) = 0, \quad (i = 1, 2)$$

θ' désignant le paramètre du point projeté de C_3. Le lieu de l'intersection des éléments homologues est l'hyperboloïde ayant pour équation

$$\frac{z_1 - 2z_2\mu_1 + z_3\mu_1^2}{z_2 - 2z_3\mu_1 + z_4\mu_1^2} = \frac{z_1 - 2z_2\mu_2 + z_3\mu_2^2}{z_2 - 2z_3\mu_2 + z_4\mu_2^2},$$

ou bien

$$b_0(z_1z_3 - z_2^2) + b_1(z_1z_4 - z_2z_3) + b_2(z_2z_4 - z_3^2) = 0. \qquad (13)$$

Cette équation peut être déduite de $f_2 \equiv b_x^2 = 0$ par la substitution

$$x_1^2 : 2x_1x_2 : x_2^2 = (z_1z_3 - z_2^2) : (z_1z_4 - z_2z_3) : (z_2z_4 - z_3^2). \qquad (14)$$

Par cette substitution, nous pourrons, dans la suite, faire correspondre à certaines formes d'ordre pair des surfaces du même ordre.

A toute forme quadratique correspond, par la substitution (14), *un hyperboloïde à une nappe, lieu des droites s'appuyant sur* $\mathcal{C}_3$ *qui sont les intersections des plans homologues de deux faisceaux ayant pour axes les tangentes aux points racines de la forme.*

Dans le cas où $\Delta = 0$, l'équation (13) représente un cône du second ordre qui projette la cubique gauche à partir du point de contact de la tangente correspondant à la forme f_2.

L'hyperboloïde (13) est encore défini par le système de génératrices :

$$(z_1 - 2z_2\mu_1 + z_3\mu_1^2) - \theta(z_1 - 2z_2\mu_2 + z_3\mu_2^2) = 0,$$
$$(z_2 - 2z_3\mu_1 + z_4\mu_1^2) - \theta(z_2 - 2z_3\mu_2 + z_4\mu_2^2) = 0,$$

qui rencontrent $\mathcal{C}_3$ en deux points, racines de l'équation

$$x_1^2(1 - \theta) - 2x_1x_2(\mu_1 - \theta\mu_2) + x_2^2(\mu_1^2 - \theta\mu_2^2) = 0.$$

Si, entre les expressions

$$\lambda + \lambda' = \frac{2(\mu_1 - \theta\mu_2)}{1 - \theta}, \qquad \lambda\lambda' = \frac{\mu_1^2 - \theta\mu_2^2}{1 - \theta},$$

nous éliminons θ, puis μ_1 et μ_2 au moyen des relations (2), il vient

$$b_0\lambda\lambda' + b_1(\lambda + \lambda') + b_2 = 0.$$

On voit ainsi que *les racines de* $f_2 = 0$ *sont les points doubles d'une involution* I_1^2 *dont les couples sont marqués sur* $\mathcal{C}_3$ *par les génératrices* (*à caractéristique* θ) *de l'hyperboloïde* f_2.

5. D'après ce qui précède, nous pouvons construire l'hyperboloïde relatif au hessien H_5 de la forme f_5 ; son équation, donnée par la substitution (14), est

$$\left.\begin{aligned} 2(a_0a_2 - a_1^2)(z_1z_3 - z_2^2) + (a_0a_3 - a_1a_2)(z_1z_4 - z_2z_3) \\ + 2(a_1a_3 - a_2^2)(z_2z_4 - z_3^2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Prenons le plan polaire du foyer A de la forme f_3, par rapport à cet hyperboloïde ; nous trouvons :

$$\left.\begin{aligned} z_1(a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3) + 3z_2(a_0a_1a_3 - 2a_0a_2^2 + a_1^2a_2) \\ - 3z_3(a_0a_2a_5 - 2a_1^2a_3 + a_1a_2^2) - z_4(a_0a_3^2 - 3a_1a_2a_3 + 2a_2^3) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

C'est précisément le plan focal du covariant Q_3 de f_3. Son équation peut se déduire de $Q_3 = 0$ par la substitution (5).

Comme on a $(f_3, Q_3)^1 = H_3^2$ et que le foyer A de f_3 est sur la bisécante hessienne, on en conclut que le foyer A′, du covariant Q_3, est aussi sur cette bisécante; en outre, à cause d'une propriété des plans polaires pris relativement aux quadriques, A′ est le conjugué harmonique de A par rapport aux points d'appui de la bisécante hessienne sur C_3.

Donc, *le plan focal du covariant* Q_3 *est le plan polaire du foyer de* f_3 *pris par rapport à l'hyperboloïde hessien; son foyer, situé sur la droite hessienne, est le conjugué harmonique du second ordre du foyer de* f_3 *par rapport aux points racines du hessien.*

On a aussi : *les plans focaux des formes* f_3 *et* Q_3 *sont les lieux des pôles, par rapport à l'hyperboloïde hessien, des plans des gerbes ayant pour centres les foyers de* Q_3 *et de* f_3.

Il existe une infinité de formes f_3 ayant le même hessien H_3. Supposons fixés la bisécante et l'hyperboloïde hessiens : *si le foyer* A *glisse sur la bisécante, les points* A *et* A′ *marquent les couples d'une involution* I_1^2 *ayant pour points doubles les racines de* H_3. Nous avons ainsi, pour la bisécante, la propriété correspondante à celle signalée pour l'hyperboloïde (n° **4**).

Les plans tangents à l'hyperboloïde hessien aux points μ_1, μ_2 sont les plans osculateurs à C_3 en ces points; par une propriété des quadriques, ces plans tangents et les plans polaires f_3 et Q_3 se coupent suivant une même droite; donc, *les plans osculateurs considérés et les deux plans focaux se coupent suivant la droite réciproque de la bisécante hessienne* (n° **2**).

En outre, *la réciproque d'une bisécante à* C_3 *est la polaire de tout point de cette bisécante par rapport à la conique d'intersection du plan focal de ce point et de l'hyperboloïde correspondant à cette bisécante.*

6. Les plans focaux de f_3 et Q_3 forment précisément *un couple de plans conjoints,* selon la définition de M. Cremona (*).

(*) *Journal de Crelle,* 1861, vol. LVIII, p. 148.

En effet, le plan osculateur en un point de paramètre α de C_3 coupe la développable circonscrite suivant une conique ayant pour équations

$$z_1 - 3\alpha z_2 + 3\alpha^2 z_3 - \alpha^3 z_4 = 0, \qquad (17)$$
$$(z_1 - \alpha z_2)^2 - 4\alpha^3(z_2^2 - z_1 z_3) = 0.$$

Il coupe aussi le plan fixe (4) suivant une droite dont les équations sont (17) et (4). Recherchons le pôle de cette droite par rapport à la conique; nous obtenons facilement pour les coordonnées de ce point :

$$\frac{z_1}{\alpha(a_3 + \alpha a_2)} = \frac{3z_2}{a_3 - \alpha a_2 - 2\alpha^2 a_1} = \frac{3z_3}{a_0\alpha^2 - a_1\alpha - 2a_2} = \frac{z_4}{a_1 + a_0\alpha}. \qquad (18)$$

Le lieu de ce pôle, quand le plan (17) varie, s'obtiendra en éliminant α entre ces rapports. Le 1er et le 4e, le 3e et le 4e donnent respectivement :

$$\alpha^2 = \frac{(a_1^2 - 2a_0a_2)z_1 + 3a_1a_3z_2 + 2a_2a_3z_4}{(a_1a_2 - a_0a_3)z_4 + 3a_0a_2z_3 - a_0^2z_1},$$
$$\alpha = \frac{a_0a_1z_1 - 3a_1a_2z_3 - 2a_2^2z_4}{(a_1a_2 - a_0a_3)z_4 + 3a_0a_2z_3 - a_0^2z_1}.$$

Le lieu du pôle est donc la conique :

$$[(a_1^2 - 2a_0a_2)z_1 + 3a_1a_3z_3 + 2a_2a_3z_4][3a_0a_2z_3 + (a_1a_2 - a_0a_3)z_4 - a_0^2z_1] - [a_0a_1z_1 - 3a_1a_2z_3 - 2a_2^2z_4]^2 = 0.$$

Le plan de cette conique, plan conjoint de (4), s'obtient en remplaçant α^2 et α par leurs valeurs dans l'équation formée par les deux premiers rapports (18). Nous retrouvons ainsi le plan (16), focal de Q_3.

Les énoncés du n° 5 peuvent ainsi se transformer en ceux de M. Cremona (*) :

Deux plans conjoints s'entrecoupent suivant une droite, intersection (réelle ou imaginaire) de deux plans osculateurs; ils ont leurs foyers sur la droite qui passe par les points de contact.

Toute droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs

(*) *Journal de Crelle*, 1861, vol. LVIII, p. 148.

est l'axe d'un faisceau de plans conjoints deux à deux; ces plans forment une involution dont les éléments doubles sont les plans osculateurs.

Toute corde de la cubique gauche contient les foyers d'un faisceau de plans conjoints deux à deux; ces foyers forment une involution dont les éléments doubles sont les points de la cubique.

On sait que si les racines de f_3 sont réelles, celles de H_3 sont imaginaires; si celles de H_3 sont réelles, deux racines de f_3 sont imaginaires; les racines de f_3 et Q_3 sont de même nature. De là résulte le théorème de Joachimsthal et de Cremona : *chaque plan, passant par une droite, intersection de deux plans osculateurs réels ou imaginaires, coupe la cubique gauche en un seul point réel ou en trois points réels.*

7. Nous avons trouvé, dans notre mémoire cité, pour les racines λ'_1, λ'_2, λ'_3 de Q_3 :

$$\lambda'_1 = \frac{a_2 - a_0\lambda_2\lambda_3}{a_1 + a_0\lambda_1}, \quad \lambda'_2 = \frac{a_2 - a_0\lambda_1\lambda_3}{a_1 + a_0\lambda_2}, \quad \lambda'_3 = \frac{a_2 - a_0\lambda_1\lambda_2}{a_1 + a_0\lambda_2}.$$

Il est aisé de voir que les couples $\lambda_1\lambda'_1$, $\lambda_2\lambda'_2$, $\lambda_3\lambda'_3$ satisfont à l'involution quadratique correspondant à l'hyperboloïde hessien; les bisécantes $\lambda_1\lambda'_1$, $\lambda_2\lambda'_2$, $\lambda_3\lambda'_3$ forment donc trois génératrices d'un même système de l'hyperboloïde hessien; celui-ci pourra s'obtenir en menant ces trois bisécantes, puis toutes les droites qui s'appuient sur elles.

Aux bisécantes $\lambda_i\lambda'_i$ ($i = 1, 2, 3$) se rapportent les hyperboloïdes

$$(a_1 + a_0\lambda_i)(z_1z_3 - z_2^2) + (a_2 + a_1\lambda_i)(z_1z_4 - z_2z_3) + (a_3 + a_2\lambda_i)(z_2z_4 - z_3^2) = 0,$$

lesquels donnent lieu aux involutions I_1^2 :

$$(a_1 + a_0\lambda_i)\lambda\lambda' + (a_2 + a_1\lambda_i)(\lambda + \lambda') + (a_3 + a_2\lambda_i) = 0.$$

Celles-ci auront un couple commun, les trois hyperboloïdes auront une génératrice commune, si

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_0\lambda_i & a_2 + a_1\lambda_i & a_3 + a_2\lambda_i \end{vmatrix} = 0;$$

cette condition est vérifiée. D'ailleurs, cette condition peut s'écrire

$$(a_1 + a_0\lambda_i)(a_1a_3 - a_2^2) - (a_2 + a_1\lambda_i)(a_0a_3 - a_1a_2) + (a_3 + a_2\lambda_i)(a_0a_2 - a_1^2) = 0,$$

expression qui montre que le foyer A, de f_3, est sur l'hyperboloïde $\lambda_i\lambda'_i$; la génératrice commune est donc la droite hessienne. Nous avons ainsi les propriétés consécutives suivantes :

Les bisécantes unissant les points correspondants de deux plans conjoints se trouvent sur l'hyperboloïde hessien.

Les hyperboloïdes relatifs aux points correspondants de deux plans conjoints se coupent suivant la droite hessienne du système.

Lorsque le foyer A décrit la bisécante hessienne, les couples de plans conjoints fournissent, pour chaque position de A, trois génératrices d'un même système de l'hyperboloïde hessien; de là l'énoncé :

L'hyperboloïde f_2, *relatif à une bisécante* f_2, *est le lieu des droites de jonction des points correspondants des couples de plans conjoints ayant leurs foyers sur cette bisécante.*

Les plans de la gerbe de sommet A coupent $\mathcal{C}_3$ en des groupes de points dont les paramètres λ, μ, ν satisfont à la relation

$$a_3 + a_2(\lambda + \mu + \nu) + a_1(\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) + a_0\lambda\mu\nu = 0. \quad (19)$$

Ils marquent donc sur la courbe les ternes de l'involution cubique du second rang, I_2^3, ayant pour éléments triples les points dont les paramètres sont les racines de $f_3 = 0$. Ces éléments triples sont les points de contact marqués sur $\mathcal{C}_3$ par les plans osculateurs menés par A.

On peut vérifier que les ternes $\lambda_1\lambda'_2\lambda'_3$, $\lambda'_1\lambda_2\lambda'_3$, $\lambda'_1\lambda'_2\lambda_3$ satisfont à la relation précédente; il en résulte que les plans $\lambda_1\lambda'_2\lambda'_3$, $\lambda'_1\lambda_2\lambda'_3$, $\lambda'_1\lambda'_2\lambda_3$ passent par le foyer de la forme f_3. Donc, *si l'on joint, par des plans, les couples* $\lambda'_1\lambda'_2$, $\lambda'_2\lambda'_3$, $\lambda'_3\lambda'_1$ *aux points* λ_1, λ_2, λ_3, *on pourra aisément reconnaître géométriquement les racines correspondantes de* f_3 *et de* Q_3.

Le plan $A\lambda_1\lambda'_2\lambda'_3$, passant par A, a son foyer dans le plan focal de f_3; ce foyer est aussi dans le plan osculateur au point λ_1 de $\mathcal{C}_3$; il se trouve donc sur la droite $A\lambda_1$. Mais il est également sur l'intersection $(\lambda'_2\lambda'_3)$ des plans osculateurs aux points $\lambda'_2\lambda'_3$; les

droites $A\lambda_1$ et $(\lambda'_2\lambda'_3)$ se rencontrent donc en ce foyer P_1. Le même raisonnement étant fait pour les plans $A\lambda'_1\lambda_2\lambda'_3$, $A\lambda'_1\lambda'_2\lambda_3$, nous trouvons deux autres points P_2, P_3 qui, avec P_1, forment un triangle homologique du triangle $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$; le centre d'homologie est A. Les côtés du triangle $P_1P_2P_3$ sont les intersections du plan focal de f_3 avec les plans osculateurs en λ'_1, λ'_2, λ'_3.

Remarquons maintenant que la bisécante $\lambda_1\lambda_2$ et le point λ'_3 sont dans un même plan, passant par le foyer A' de Q_3; ce plan passe aussi par l'intersection du plan osculateur en λ'_3 et du plan focal de Q_3; il marque sur la réciproque de la hessienne un point B_3. Mais le plan λ'_3 détermine la droite P_1P_2; les droites P_1P_2 et $\lambda_1\lambda_2$ concourent donc en B_3.

Donc, *les plans osculateurs aux points racines de la forme* Q_3 *coupent le plan focal de* f_3 *suivant un triangle homologique avec le triangle formé par la jonction des points racines de* f_3. *Le centre d'homologie est le foyer du plan* f_3; *l'axe d'homologie est la réciproque de la droite hessienne du système de la forme* f_3.

Il est évident que le plan Q_3 jouit de la même propriété par rapport aux racines de f_3.

8. Le plan Q_3 peut encore s'obtenir d'une autre façon : il est la première polaire (et par conséquent aussi la troisième) du foyer A de f_3 prise par rapport à la développable circonscrite à C_3.

La deuxième polaire est la quadrique :

$$a_0^2z_1^2 + 3z_2^2(4a_0a_2 - a_1^2) + 3z_3^2(4a_1a_3 - a_2^2) + a_3^2z_4^2 + 6a_0a_1z_1z_2 + 6a_2a_3z_3z_4 + 6z_1z_3(2a_1^2 - a_0a_2) + 6z_2z_4(2a_2^2 - a_1a_3) + 2z_1z_4(3a_1a_2 - 2a_0a_3) + 6z_2z_3(a_0a_3 + 2a_1a_2) = 0.$$

Elle coupe la cubique gauche en six points dont les paramètres s'obtiendront en faisant la substitution (1) dans l'équation précédente. Nous trouvons ainsi :

$$(a_0\lambda^3 + 3a_1\lambda^2 + 3a_2\lambda + a_3)^2 = 0. \qquad (20)$$

Donc, *la deuxième polaire du foyer de* f_3 *prise par rapport à la développable circonscrite à une cubique gauche est tangente à cette courbe aux points dont les paramètres sont racines de l'équation* $f_3 = 0$.

La conique d'intersection du plan focal de f_3 avec la quadrique ci-dessus a pour équations :

$$a_0 z_1 + 3a_1 z_2 + 3a_2 z_3 + a_3 z_4 = 0,$$

$$z_1^2(a_0^2 a_3 - a_0 a_1 a_2) + 2z_2^2(a_0 a_2 a_3 + 2a_1^2 a_3 - 3a_1 a_2^2) + 2z_3^2(a_1 a_3^2 - a_2^2 a_3)$$
$$+ z_1 z_2(3a_0 a_1 a_3 - 2a_0 a_2^2 - 3a_1^2 a_2) + z_1 z_3(a_0 a_2 a_3 + 2a_1^2 a_2 - 3a_1 a_2^2)$$
$$+ z_2 z_3(3a_1 a_2 a_3 - 6a_2^3 + a_0 a_3^2) = 0.$$

Celles-ci représentent également la conique d'intersection du plan focal de f_3 et de l'hyperboloïde hessien. Si nous considérons la droite hessienne comme étant une bisécante quelconque f_2 et le foyer A comme se mouvant sur cette droite, nous obtenons le théorème suivant :

L'hyperboloïde correspondant à une bisécante de la cubique gauche est le lieu des coniques d'intersection de la deuxième polaire de la développable circonscrite, prise par rapport aux points de la bisécante, et des plans focaux de ces points.

A cause de la relation (20), les courbes d'entrée et de sortie de l'hyperboloïde hessien et de la quadrique coïncident.

Donc, *l'hyperboloïde correspondant à une bisécante de la cubique gauche est l'enveloppe des deuxièmes polaires de la développable circonscrite à* C_3, *prises par rapport aux points de la bisécante.*

§ II. — Système de deux formes quadratiques.

Ce système comprend : trois covariants quadratiques qui sont les formes $f_2 \equiv b_x^2$, $f_2' = b_x'^2$ et leur jacobien $(f_2, f_2')^1$; trois invariants Δ, Δ', $(f_2, f_2')^2$.

9. Aux formes f_2 et f_2' correspondent, par la substitution (14), deux hyperboloïdes que nous pouvons construire (n° 4). Ils se coupent suivant la cubique gauche et une bisécante de cette courbe. Entre les équations des hyperboloïdes, éliminons successivement z_4 et z_1 ; écartons des résultats les facteurs $z_1 z_3 - z_2^2$,

$z_2z_4 - z_3^2$ qui correspondent à $\mathcal{C}_3$; nous obtenons ainsi pour les équations de la génératrice commune :

$$(b_0b'_1 - b_1b'_0)z_1 + (b_0b'_2 - b_2b'_0)z_2 + (b_1b'_2 - b_2b'_1)z_3 = 0,$$
$$(b_0b'_1 - b_1b'_0)z_2 + (b_0b'_2 - b_2b'_0)z_3 + (b_1b'_2 - b_2b'_1)z_4 = 0.$$

Celles-ci représentent précisément la bisécante correspondant au jacobien $(f_2, f'_2)^1$.

Donc, *les racines du jacobien de deux formes quadratiques sont marquées sur la cubique gauche par la génératrice commune aux deux hyperboloïdes correspondant à ces formes.*

La théorie de l'involution I_1^2 conduit aussi à ce résultat. Un système de génératrices de chacun des hyperboloïdes f_2, f'_2 marque sur $\mathcal{C}_3$ les couples d'une involution quadratique (n° 4); or, les racines du jacobien de deux formes quadratiques forment le couple commun aux deux involutions; la bisécante jacobienne est donc la génératrice commune aux hyperboloïdes f_2 et f'_2.

Si l'on projette la cubique gauche au moyen de deux faisceaux de plans ayant pour axes les bisécantes f_2 et f'_2 on obtient l'hyperboloïde jacobien. Les bisécantes f_2 et f'_2 sont deux génératrices d'un même mode de cette surface; les couples de points qu'elles marquent sur $\mathcal{C}_3$ appartiennent à l'involution quadratique ayant pour points doubles les racines de $(f_2, f'_2)^1 = 0$.

10. Les hyperboloïdes f_2 et f'_2 déterminent deux involutions I_1^2, $\mathrm{I}_1'^2$. Soit $\frac{y_1}{y_2}$ le paramètre d'un point commun; si, entre les équations

$$b_xb_y = 0, \qquad b'_xb'_y = 0,$$

nous éliminons ce paramètre, il vient

$$(bb')b_xb'_{x'} = 0,$$

égalité qui représente une homographie. Ainsi, les génératrices du système θ des hyperboloïdes considérés, qui rencontrent $\mathcal{C}_3$ au même point, marquent sur cette courbe les couples d'une homographie. La relation ci-dessus devient involutive si l'on a

$$(bb')^2 = 0.$$

Donc, la condition $(f_2, f'_2)^2 = 0$ exprime que les couples correspondants aux éléments communs des involutions I_1^2, $I_1'^2$ forment une involution. L'involution résultante correspond au jacobien $(f_2, f'_2)^1$.

On sait que $(f_2, f'_2)^2 = 0$ exprime aussi que les racines de f_2 ou f'_2 forment un couple des involutions $I_1'^2$ ou I_1^2.

11. On trouve facilement pour les coordonnées tétraédriques axiales de la bisécante f_2 :

$$p_{12} = \frac{b_2^2}{b_0^2}, \quad p_{13} = -\frac{2b_1b_2}{b_0^2}, \quad p_{23} = \frac{b_2}{b_0},$$

$$p_{34} = 1, \quad p_{24} = -\frac{2b_1}{b_0}, \quad p_{14} = \frac{4b_1^2 - b_0b_2}{b_0^2},$$

La condition $(pp') = 0$, pour que les droites f_2 et f'_2 se rencontrent, s'écrit :

$$(b_0b'_2 - b_2b'_0)^2 - 4(b_0b'_1 - b_1b'_0)(b_1b'_2 - b_2b'_1) = 0.$$

Donc, si l'invariant Δ du jacobien de f_2 et f'_2 est nul, les bisécantes relatives à ces formes se coupent ; or, si deux bisécantes réelles se rencontrent, elles coïncident ou elles passent par un même point de C_3 ; dans ce dernier cas, les deux formes f_2, f'_2 ont une racine commune, leur jacobien a cette racine, double, et la droite jacobienne est tangente à la cubique gauche.

§ III. — Système d'une forme quadratique et d'une forme cubique.

Ce système comprend : trois covariants cubiques $f_3 \equiv a_x^3$, Q_3, $(f_3, f_2)^1$; trois covariants quadratiques $f_2 \equiv b_x^2$, H_3, $(H_3, f_2)^1$; quatre covariants linéaires $(f_3, f_2)^2$, $(f_3, f_2^2)^3$, $(Q_3, f_2)^2$, $(Q_3, f_2^2)^3$; cinq invariants R, Δ, $(H_3, f_2)^2$, $(f_3^2, f_2^3)^6$, $(f_3Q_3, f_2^3)^6$ (*).

12. Nous pouvons construire l'hyperboloïde f_2 ; le plan polaire

(*) G. Salmon, *Leçons d'algèbre supérieure.*

du foyer A, de la forme f_3, par rapport à cette surface a pour équation :

$$\left.\begin{aligned} z_1(a_1b_0 - a_0b_1) + z_2(-a_0b_2 + 2a_2b_0 - a_1b_1) + z_3(a_2b_1 - 2a_1b_2 + a_3b_0) \\ + z_4(a_3b_1 - a_2b_2) = 0; \end{aligned}\right\} (21)$$

il rencontre C_3 aux points dont les paramètres sont les racines de l'équation

$$(f_3, f_2)^1 = 0,$$

que l'on obtient par la substitution (5).

Donc, *les racines du jacobien d'une forme cubique et d'une forme quadratique sont marquées sur* C_3 *par les intersections de la courbe avec le plan polaire du foyer de la forme cubique pris par rapport à l'hyperboloïde correspondant à la forme quadratique.*

Le plan (21) rencontre la bisécante hessienne de f_3 en un point, conjugué harmonique du second ordre du foyer de f_3 par rapport aux racines de H_3. Donc ce plan passe par le foyer A′ du plan Q_3, conjoint de f_3; et les racines du covariant $(f_3, f_2)^1$ forment toujours un terne de l'involution cubique I_2^3, caractérisée par la forme $Q_3 = 0$.

Nous avons rappelé au n° **17** de notre premier mémoire que, si les racines de $f_3 \equiv a_x^3$ sont les points triples d'une involution I_2^3 et la déterminent, la condition pour que les racines de $F_3 \equiv A_x^3$ forment un terne de cette involution, est que l'invariant linéo-linéaire $(f_3, F_3)^3$ des deux formes soit égal à zéro. Il résulte de là que, dans le cas actuel, on a constamment :

$$[Q_3, (f_3, f_2)^1]^3 = 0.$$

Réciproquement, le plan $(Q_3, f_2)^1$ passe par le foyer de f_3, détermine un terne de l'involution cubique correspondant à $f_3 = 0$, et l'on a toujours :

$$[f_3, (Q_3, f_2)^1]^3 = 0.$$

Le plan Q_3, *conjoint de* f_3, *est un cas particulier du plan* (21), *celui où l'hyperboloïde considéré est l'hyperboloïde hessien;* c'est d'ailleurs ce qui résulte de l'expression $Q_3 \equiv (f_3, H_3)^1$.

Comme le plan (21) passe par le foyer du plan Q_5, son foyer se trouve dans le plan Q_5; lorsque la bisécante f_2 prend toutes les positions sur C_5, ce foyer décrit le plan Q_5.

Donc, *le plan conjoint d'un plan* a *est le lieu des foyers des plans polaires du foyer* A *du plan* a *par rapport à tous les hyperboloïdes circonscrits à* C_5.

Le foyer du plan (21) a pour coordonnées

$$\frac{z_1}{a_2b_2-a_3b_1}=\frac{5z_2}{a_2b_1-2a_1b_2+a_3b_0}=\frac{3z_3}{a_0b_2-2a_1b_0+a_1b_1}=\frac{z_4}{a_1b_0-a_0b_1},$$

expressions qui se ramènent aux formules (18) si l'on a $b_0b_2-b_1^2=0$. Il en résulte que *les foyers des plans tels que* (21) *décrivent une conique du plan* Q_5 *quand les surfaces auxquelles se rapportent ces plans sont des cônes du second degré* (nos **6** et **4**).

13. Le covariant $(H_5, f_2)^1$, jacobien de deux formes quadratiques, et l'invariant $(H_5, f_2)^2$ s'interprètent par ce que nous avons vu au § II.

D'après le numéro précédent, les involutions I_2^5 correspondant aux formes $(f_5, f_2)^1$, $(Q_5, f_2)^1$ sont connues. Nous pouvons facilement écrire les équations, analogues à (19), de ces involutions. Aux quantités λ, μ, dans les équations des involutions correspondant aux formes f_5, Q_5, $(f_5, f_2)^1$, $(Q_5, f_2)^1$, substituons les racines de $f_2=0$. Nous obtenons les relations :

$$(f_5,\ f_2)^2=0,\quad (Q_5,\ f_2)^2=0,\quad (f_5,\ f_2^2)^5=0,\quad (Q_5,\ f_2^2)^5=0.$$

Donc, *la racine de chacun des covariants linéaires qui forment ces équations marque, sur* C_5, *le point complétant le terne des involutions* I_2^5 *correspondant à* f_5, Q_5, $(f_5, f_2)^1$, $(Q_5, f_2)^1$, *terne dont font partie les points racines de* f_2.

Remarquons que les foyers des quatre plans ainsi menés par la bisécante f_2 se trouvent sur la droite réciproque de cette bisécante et à l'intersection de cette réciproque avec les plans f_5, Q_5, $(f_5, f_2)^1$, $(Q_5, f_2)^1$. Nous avons ainsi une relation entre les ternes des involutions I_2^5 correspondant aux quatre formes cubiques considérées, lorsque ces ternes ont deux éléments communs.

Enfin, les racines de $(f_3, f_2)^2$ et $(f_3, f_2^2)^3$ sont conjuguées harmoniques du second ordre des racines de f_2. La bisécante qui les joint est donc une génératrice de l'hyperboloïde f_2; on peut vérifier qu'il en est de même de la bisécante joignant les points $(Q_3, f_2)^2$, $(Q_3, f_2^2)^3$.

14. Lorsque la bisécante f_2 passe par le foyer de f_3, on a les conditions :

$$a_3b_0 - 2a_2b_1 + a_1b_2 = 0,$$
$$a_2b_0 - 2a_1b_1 + a_0b_2 = 0.$$

Elles indiquent que la racine de

$$(f_3, f_2)^2 = (a_0b_2 - 2a_1b_1 + a_2b_0)x_1 + (a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_3b_0)x^2 = 0$$

est indéterminée. Nous retrouvons ainsi ce résultat bien connu :

Les racines du hessien de la forme cubique représentent les éléments neutres de l'involution I_2^3 *caractérisée par la forme* f_3.

§ IV. — Système de deux formes cubiques binaires.

Ce système comprend : un covariant biquadratique $(f_3, f_3')^1$; six covariants cubiques $f_3 \equiv a_x^3$, $f_3' \equiv b_x^3$, Q_3, Q_3', $(f_3, H_3')^1$, $(f_3', H_3)^1$; six covariants quadratiques H_3, H_3', $(H_3, H_3')^1$, $(f_3, f_3')^2$, $(f_3, Q_3')^2$, $(f_3', Q_3)^2$; six covariants linéaires $(f_3, H_3')^2$, $(f_3', H_3)^2$, $(Q_3, H_3')^2$, $(Q_3', H_3)^2$, $(f_3, H_3'^2)^3$, $(f_3', H_3^2)^3$; sept invariants R, R', $(f_3, f_3')^3$, $(Q_3, Q_3')^3$, $(f_3, Q_3')^3$, $(f_3', Q_3)^3$, $(H_3, H_3')^2$ (*). Nous appellerons a et b, A et B respectivement les plans focaux et les foyers des formes $f_3 \equiv a_x^3$, $f_3' \equiv b_x^3$.

15. La droite AB a pour équations :

$$\begin{Vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \\ -b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{Vmatrix} = 0.$$

D'après les propriétés des cubiques gauches, par cette droite

(*) G. Salmon, *Leçons d'algèbre supérieure.*

on peut mener quatre plans tangents à la courbe. Le plan tangent au point de paramètre λ rencontre encore la courbe en un second point de paramètre μ. Ce plan a pour équation :

$$z_1 - z_2(2\lambda + \mu) + z_3(\lambda^2 + 2\lambda\mu) - z_4\lambda^2\mu = 0.$$

S'il passe par AB, on a les conditions :

$$\left.\begin{aligned} a_3 + a_2(2\lambda + \mu) + a_1(\lambda^2 + 2\lambda\mu) + a_0\lambda^2\mu = 0, \\ b_3 + b_2(2\lambda + \mu) + b_1(\lambda^2 + 2\lambda\mu) + b_0\lambda^2\mu = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

En éléminant μ, l'équation résultante aura pour racines les paramètres $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$ des points de contact. On trouve :

$$(a_0b_1 - a_1b_0)x_1^4 + 2(a_0b_2 - a_2b_0)x_1^3x_2 + (a_0b_3 + 3a_1b_2 - 3a_2b_1 - a_3b_0)x_1^2x_2^2 + 2(a_1b_3 - a_3b_1)x_1x_2^3 + (a_2b_3 - a_3b_2)x_2^4 = 0.$$

C'est le jacobien $(f_3, f'_3)' = 0$.

Donc, *les racines du jacobien de deux formes cubiques sont les paramètres des points de contact des quatre plans tangents que l'on peut mener à la cubique gauche par la droite de jonction des foyers des formes* f_3 *et* f'_3. Ce sont aussi les paramètres des tangentes à C_3 qui s'appuient sur la droite AB, car chaque plan tangent est déterminé par AB et une tangente.

L'élimination de λ entre les équations (22) donne

$$\begin{vmatrix} a_0\mu + a_1 & a_1\mu + a_2 & a_2\mu + a_3 & \\ & a_0\mu + a_1 & a_1\mu + a_2 & a_2\mu + a_3 \\ b_0\mu + b_1 & b_1\mu + b_2 & b_2\mu + b_3 & \\ & b_0\mu + b_1 & b_1\mu + b_2 & b_2\mu + b_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (23)$$

équation dont les racines sont les paramètres des seconds points d'intersection des plans considérés ci-dessus avec la cubique gauche.

Les deux formes f_3, f'_3 définissent les points triples de deux involutions I_2^3. Les ternes communs à ces involutions constituent les ternes d'une involution cubique de premier rang, I_1^3, lesquels sont marqués sur la cubique gauche par les plans passant par AB. L'involution I_1^3 possède quatre ternes formés d'un

élément double (point double) et d'un élément simple (point de ramification) (*). Les éléments doubles sont marqués sur C_3 par les points de contact des plans tangents menés par AB; les points de ramification sont les racines de l'équation (23) et ont été construits.

16. Chaque terne de points d'une involution I_1^3 définit trois bisécantes à C_3, situées dans un même plan passant par AB. Cherchons le lieu de ces droites. L'une d'elles a pour équations :

$$z_1 - z_2(\lambda + \mu) + z_3\lambda\mu = 0,$$
$$z_2 - z_3(\lambda + \mu) + z_4\lambda\mu = 0.$$

D'ailleurs, les équations de l'involution I_1^3 sont :

$$a_0\lambda\mu\nu + a_1(\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) + a_2(\lambda + \mu + \nu) + a_3 = 0,$$
$$b_0\lambda\mu\nu + b_1(\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) + b_2(\lambda + \mu + \nu) + b_3 = 0.$$

L'élimination des paramètres des bisécantes donne l'équation du lieu :

$$\left.\begin{aligned}
&(a_0b_1 - a_1b_0)(z_1z_3 - z_2^2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)(z_1z_4 - z_2z_3)^2 \\
&+ (a_2b_3 - a_3b_2)(z_2z_4 - z_3^2)^2 + (a_0b_2 - a_2b_0)(z_1z_3 - z_2^2)(z_1z_4 - z_2z_3) \\
&+ (a_1b_3 - a_3b_1)(z_1z_4 - z_2z_3)(z_2z_4 - z_3^2) \\
&+ (a_1b_2 - a_3b_0 + a_0b_3 - a_2b_1)(z_2z_4 - z_3^2)(z_1z_3 - z_2^2) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

C'est une surface gauche du quatrième ordre que nous nommons S_4. Elle a C_3 comme ligne double.

Les quatre plans tangents, que l'on peut mener par AB à C_3, déterminent sur S_4 quatre génératrices singulières, les tangentes à C_3; ces génératrices sont doubles; les génératrices simples correspondantes marquent sur la cubique gauche les points de ramification considérés ci-dessus.

Tout plan passant par A ou B a son foyer dans les plans *a* ou *b*. Tout plan *p*, passant par AB, a son foyer sur la droite (*ab*). Soit P ce foyer; les plans osculateurs aux trois points

(*) C. le Paige, *Essais de géométrie supérieure du troisième ordre* (Mém. de la Soc. roy. des sciences de Liége, t. X, 2e série, p. 59).

d'un terne de I_1^3, marqué sur C_3 par p, se coupent en P, suivant trois droites, réciproques des bisécantes marquées par p dans la surface S_4. Ces trois droites sont donc les génératrices d'une surface s_4 ayant (ab) pour droite triple; c'est la surface réciproque de S_4. Elle est aussi du quatrième ordre (*).

L'équation (24) se déduit de $(f_3, f_3)^1$, ou mieux de

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f'_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial f'_3}{\partial x_1} = 0,$$

par la substitution (14). Elle se déduit aussi de l'équation de la conique d'involution $\mathfrak{H}$ (**) par la substitution :

$$z_1 : 2z_2 : z_3 = (z_1z_3 - z_2^2) : (z_1z_4 - z_2z_3) : (z_2z_4 - z_3^2).$$

Les surfaces S_4 et s_4 peuvent donner les constructions des ternes de I_1^3. — *Au moyen de la surface* S_4 : on mènera un plan par la directrice AB; il coupe S_4 suivant trois génératrices dont les points communs marquent (sur C_3) un terne de I_1^3. Pour compléter le terne dont fait partie le point ξ de C_3, on mènera par ce point les deux génératrices de S_4; elles donnent les points ζ et η. *Au moyen de la surface* s_4 : par un point de (ab) passent trois génératrices de s_4; les faces du trièdre, dont ces génératrices sont les arêtes, sont trois plans osculateurs à C_3 et marquent sur cette courbe un terne de I_1^3. Pour compléter le terne dont fait partie le point ξ de C_3, on mènera en ce point le plan osculateur de C_3; ce plan rencontre (ab) en un point P d'où l'on mène à C_3 les deux autres plans osculateurs.

Les surfaces S_4 et s_4 peuvent se construire quand on connaît deux ternes de points de I_1^3, sur C_3. Les plans de ces ternes se coupent en donnant AB; les plans osculateurs en ces ternes procurent deux points de (ab). La connaissance de AB, (ab) et C_3 donne celle de S_4 et s_4.

(*) Les surfaces S_4 et s_4 ont été trouvées, d'une autre façon, par Cayley, *A Second Memoir on skew Surfaces otherwise Scrolls*, — et, *A Third Memoir*, etc. (Philosophical Transactions, 1864 et 1869).

(**) Voir notre mémoire cité, pp. 55 et suivantes.

Les points doubles de I_1^3 sont sur les quatre tangentes menées par AB à C_3. Or ces tangentes se trouvent dans les plans osculateurs aux points de contact et les plans tangents; ces quatre tangentes sont donc quatre droites s'appuyant à la fois sur AB et (ab).

Pour construire les ternes d'une involution I_1^3, déterminée par les points doubles, il suffira de mener en ces points les quatre tangentes à C_3 et de trouver les deux transversales communes à ces droites. La connaissance d'un point de ramification, en achevant de déterminer l'involution I_1^3, indiquera laquelle de ces transversales est AB ou (ab).

On voit, par ce qui précède, l'analogie entre les coniques $\mathfrak{K}$ et k et les surfaces S_4 et s_4. On pourrait appeler celles-ci surfaces d'involution.

17. De ce qui précède, résulte la démonstration géométrique du théorème suivant :

La droite de jonction des foyers de deux plans et l'intersection de ces plans sont les transversales communes aux quatre tangentes que l'on peut mener à une cubique gauche par l'une de ces droites.

Voici une démonstration analytique. Les conditions pour que la tangente au point du paramètre λ de C_3

$$z_1 - 2z_2\lambda + z_3\lambda^2 = 0,$$
$$z_2 - 2z_3\lambda + z_4\lambda^2 = 0,$$

rencontre la droite

$$z_1(a_1b_2 - a_2b_1) + z_2(a_1b_3 - a_3b_1) + z_3(a_2b_3 - a_3b_2) = 0,$$
$$z_2(a_0b_1 - a_1b_0) + z_3(a_0b_2 - a_2b_0) + z_4(a_1b_2 - a_2b_1) = 0,$$

jonction des foyers A et B, et la droite

$$a_0z_1 + 3a_1z_2 + 3a_2z_3 + a_3z_4 = 0,$$
$$b_0z_1 + 3b_1z_2 + 3b_2z_3 + b_3z_4 = 0,$$

intersection des plans a et b, sont :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2\lambda & \lambda^2 & \\ & 1 & -2\lambda & \lambda^2 \\ a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ b_0 & 3b_1 & 3b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2\lambda & \lambda^2 & \\ & 1 & -2\lambda & \lambda^2 \\ a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & a_2b_3 - a_3b_2 & \\ & a_0b_1 - a_1b_0 & a_0b_2 - a_2b_0 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

conditions qui se ramènent l'une à l'autre et à l'équation $(f_3, f'_3)^1 = 0$.

Donc, si λ est une racine de $(f_3, f'_3)^1 = 0$, la tangente en ce point rencontre à la fois AB et (ab).

18. Par le point A passe une seule génératrice de S_4, la droite hessienne h_3. Si l'on mène le plan (h_3, AB), il rencontre C_3 en un troisième point qui, avec les racines de H_3, forme un terne de I_1^3. Ce terne est un groupe de l'involution $I_2'^3$ caractérisée par la forme b_x^3; le troisième point considéré est donc (n° **13**) racine de l'équation

$$(f'_3, H_3)^2 = 0.$$

On voit, d'après cela, quelle est la signification des covariants linéaires $(f_3, H'_3)^2$, $(Q_3, H'_3)^2$, $(Q'_3, H_3)^2$.

Le n° **12** montre que les racines de $(f_3, H'_3)^1$ sont les paramètres des intersections de C_3 avec le plan polaire de A pris par rapport à l'hyperboloïde hessien de la forme f'_3. Ce plan, passant par le foyer A′ de Q_3, marque sur la cubique support un terne de l'involution I_2^3 caractérisé par la forme Q_3. Remarquons que l'on peut avoir très simplement le foyer du plan $(f_3, H'_3)^1$. Ce point est l'intersection des plans Q_3, $(f_3, H'_3)^1$ et du plan oscillateur en un point racine de la forme $(f_3, H'_3)^1$.

Le plan, mené par la bisécante h'_3 et le foyer que nous venons de déterminer, marque, sur C_3, le point complétant le terne de

l'involution I_2^5 relative à $(f_3, H_3')^1$, terne dont font partie les racines de H_3'. Ce point, d'après le n° **13**, a pour paramètre la racine du covariant $[(f_3, H_3')^1, H_3']^2$, c'est-à-dire de $(f_3, H_3'^2)^5$.

Les covariants $(f_3', H_3)^1$ et $(f_3', H_3^2)^5$ s'interprètent d'une manière analogue.

19. Le covariant quadratique $(H_3, H_3')^1$, jacobien de deux formes quadratiques, a une signification géométrique qui résulte du n° **9**.

Nous savons (n° **18**) que, les racines de H_3' étant considérées comme formant deux points d'un terne de l'involution cubique caractérisée par $f_3 = 0$, le paramètre du point α qui complète le terne est la racine de l'équation $(f_3, H_3')^2 = 0$.

Supposons actuellement que les racines du covariant

$$(f_3, f_3')^2 = 0 \qquad (25)$$

forment deux points d'un terne de l'involution I_2^5 correspondant à f_3'. En menant le plan qui passe par la bisécante (25) et le foyer B de f_3', nous obtenons le point qui complète le terne; or ce point est précisément le point α, car on a :

$$[f_3', \ (f_3, f_3')^2]^2 = (f_3, H_3')^2.$$

Il résulte de là que le plan déterminant les racines de (25) passe par la droite Bα, qui s'appuie sur $\mathcal{C}_3$ au point α. Tous les plans qui passent par cette droite interceptent sur $\mathcal{C}_3$ des cordes, génératrices d'un hyperboloïde circonscrit à $\mathcal{C}_3$.

La forme (25) étant symétrique par rapport à f_3 et f_3', les racines de cette forme sont aussi sur une génératrice de l'hyperboloïde engendré par les cordes interceptées par les plans tournant autour de la droite Aβ, le point β correspondant au covariant $(f_3', H_3)^2$ et étant facile à construire.

Donc, *les racines de la seconde transvection de deux formes cubiques sont marquées sur* $\mathcal{C}_3$ *par la génératrice commune aux deux hyperboloïdes engendrés par les cordes interceptées sur* $\mathcal{C}_3$ *par deux faisceaux de plans dont les axes passent par les foyers de ces formes et les points correspondants aux covariants linéaires* $(f_3, H_3')^2$, $(f_3', H_3)^2$.

Il est aisé, d'après cela, de voir la signification de $(f_3, Q'_3)^2$, $(f'_3, Q_3)^2$, en les rapprochant respectivement des formes linéaires $(Q'_3, H_3)^2$, $(Q_3, H'_3)^2$.

20. Les points triples d'une involution I_2^3 et un terne de points qui appartiennent à cette involution sont tels que l'invariant $(f_3, f'_3)^3$, des deux formes qui les représentent, est nul. La condition

$$(f_3,\ f'_3)^3 = 4(a_0b_3 - 3a_1b_2 + 3a_2b_1 - a_3b_0) = 0 \qquad (26)$$

exprime donc que le foyer B de f'_3 est dans le plan focal a de f_3 et réciproquement.

Les foyers A et B étant chacun dans les plans a et b, b et a, la jonction de ces foyers est l'intersection des plans focaux a et b.

Donc, *quand la relation* (*26*) *existe entre les coefficients des surfaces* S_4 *et* s_4, *la directrice de la première coïncide avec la droite triple de la seconde; la droite* AB *est la seule transversale* (*double*) *que l'on peut mener aux quatre tangentes communes à* C_3.

D'après ce qui précède, on voit la signification des trois invariants $(Q_3, Q'_3)^3$, $(f_3, Q'_3)^3$, $(f'_3, Q_3)^3$.

Lorsque l'équation $f'_3 = 0$ représente un terne de l'involution I_2^3 dont les points triples sont racines de Q_3, la bisécante relative à $(f_3, f'_3)^2$ est une génératrice de l'hyperboloïde hessien H_3. Les racines de $(f_3, f'_3)^2 = 0$ sont alors conjuguées harmoniques du second ordre des racines de $H_3 = 0$.

Remarquons maintenant que $(H_3, H'_3)^2$ est l'invariant du jacobien des deux quadratiques H_3 et H'_3. Donc, la condition

$$(H_3,\ H'_3)^2 = 0$$

exprime que la bisécante $(H_3, H'_3)^4 = 0$ est tangente à C_3, que les deux formes hessiennes ont une racine commune. Les deux droites hessiennes sont donc dans un même plan, passant par AB et sécant à C_3. Les plans f_3, f'_3, Q_3, Q'_3 ont leurs foyers dans ce plan et, par suite, sont concourants. D'un autre côté, si l'on se reporte à la signification de la forme $(f_3, H'_3)^2$, on voit que la racine commune et les racines non communes de H_3 et H'_3 sont

la racine double de $(H_3, H_3')^1$ et les racines des covariants linéaires $(f_3, H_3')^2$, $(f_3', H_3)^2$.

Enfin, la condition $(H_3, H_3')^2 = 0$ exprime que la droite correspondante à $(f_3, f_3')^2$ est la bisécante que l'on peut mener à $\mathcal{C}_3$ par le point d'intersection des droites $A\beta$ et $B\alpha$.

§ V. — Système d'une forme cubique et d'une forme linéaire.

21. Nous considérons la forme $f_3 \equiv a_x^3$ dont le foyer est A et la forme linéaire $f_1 \equiv c_x = c_0x_1 + c_1x_2$ représentée sur la cubique gauche par le point C, de paramètre $-\frac{c_1}{c_0}$.

Au point C correspond, dans l'involution I_2^3 caractérisée par la forme f_3, une involution I_1^2 dont l'équation symbolique est

$$(ac)a_xa_y = 0. \tag{27}$$

Les couples de cette involution sont marqués sur $\mathcal{C}_3$ par les plans tournant autour de la droite AC, qui s'appuie en C sur la courbe. Ces plans déterminent les bisécantes :

$$\left.\begin{aligned} z_1 - z_2(x + y) + z_3xy = 0, \\ z_2 - z_3(x + y) + z_4xy = 0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Dans ces équations, les valeurs de x et y satisfont à la condition (27). En éliminant ces quantités entre les trois équations, on obtient

$$\left.\begin{aligned} (a_1c_0 - a_0c_1)(z_1z_3 - z_2^2) + (a_2c_0 - a_1c_1)(z_1z_4 - z_2z_3) \\ + (a_3c_0 - a_2c_1)(z_2z_4 - z_3^2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Cet hyperboloïde correspond précisément à la forme $(f_3, f_1)^1$. Les points doubles de l'involution I_1^2, c'est-à-dire les points où deux génératrices du système (28) sont tangentes à $\mathcal{C}_3$, marquent sur cette coube les racines de ce covariant. *Elles sont donc les paramètres des points de contact des plans tangents que l'on peut mener à* $\mathcal{C}_3$ *par la droite* AC.

On peut constater que les intersections de la bisécante $(f_3, f_1)^1$

avec l'hyperboloïde hessien H_3 sont indéterminées; cette bisécante est donc sur l'hyperboloïde H_3; de là, le théorème :

L'hyperboloïde hessien d'une forme f_3 *est le lieu de toutes les bisécantes représentatives des jacobiens de la forme* f_3 *avec toutes les formes linéaires. Les racines d'une forme* (f_3, f_1) *sont conjuguées harmoniques du second ordre des racines du hessien de* f_3.

A cette propriété de l'hyperboloïde hessien correspond la propriété suivante de la bisécante hessienne.

Prenons le plan polaire de A par rapport à l'hyperboloïde (29); son équation est

$$z_1c_0(a_0a_2 - a_1^2) + z_2[c_0(a_0a_3 - a_1a_2) + c_1(a_0a_2 - a_1^2)] + z_3[c_0(a_1a_3 - a_2^2) + c_1(a_0a_3 - a_1a_2)] + z_4c_0(a_1a_3 - a_2^2) = 0.$$

La substitution (5) donne l'équation dont les racines sont les paramètres des intersections de ce plan avec C_3; nous trouvons :

$$[(a_0a_2 - a_1^2)x_1^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)x_1x_2 + (a_1a_3 - a_2^2)x_2^2][c_0x_1 + c_1x_2] = 0.$$

Donc, le plan polaire considéré passe par le point C et la bisécante hessienne.

Ainsi : *les plans polaires du foyer d'une forme* f_3 *par rapport à tous les hyperboloïdes à une nappe correspondant aux jacobiens de* f_3 *avec toutes les formes linéaires forment un faisceau dont l'axe est la bisécante hessienne de* f_3.

Ces plans polaires sont des plans tangents, car A est sur la bisécante hessienne.

22. Le cône relatif au point $-\frac{c_1}{c_0}$ a pour équation :

$$c_0^2(z_1z_3 - z_2^2) + c_0c_1(z_1z_4 - z_2z_3) + c_1^2(z_2z_4 - z_3^2) = 0.$$

Il coupe l'hyperboloïde jacobien (29) suivant une bisécante à C_3. Quand le point $-\frac{c_1}{c_0}$ se meut sur C_3, cette bisécante engendre une surface dont l'équation s'obtiendra par l'élimination de c_0 et c_1. On trouve :

$$(z_1z_3 - z_2^2)[a_0(z_1z_3 - z_2^2) + a_1(z_1z_4 - z_2z_3) + a_2(z_2z_4 - z_3^2)]^2 + (z_1z_4 - z_2z_3)[a_0(z_1z_3 - z_2^2) + a_1(z_1z_4 - z_2z_3) + a_2(z_2z_4 - z_3^2)][a_1(z_1z_3 - z_2^2) + a_2(z_1z_4 - z_2z_3) + a_3(z_2z_4 - z_3^2)] + (z_2z_4 - z_3^2)[a_1(z_1z_3 - z_2^2) + a_2(z_1z_4 - z_2z_3) + a_3(z_2z_4 - z_3^2)] = 0.$$

La substitution (14) donne la relation :

$$(a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3)^2 = 0.$$

La surface considérée correspond donc au carré de a_x^3 par la substitution (14); elle a comme génératrices singulières la droite hessienne, intersection des deux hyperboloïdes

$$a_0(z_1z_3 - z_2^2) + a_1(z_1z_4 - z_2z_3) + a_2(z_2z_4 - z_3^2) = 0,$$
$$a_1(z_1z_3 - z_2^2) + a_2(z_1z_4 - z_2z_3) + a_3(z_2z_4 - z_3^2) = 0,$$

et les tangentes à $\mathcal{C}_3$ aux points racines de f_3.

PRODROME

DE LA

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

L'ÉLECTRICITÉ

PAR

P. DE HEEN

PROFESSEUR DE PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

AVANT-PROPOS

Nous avons dans toutes nos recherches adopté la méthode qui consiste à les faire tendre toutes vers un but unique que nous nous proposions de réaliser au début. Chaque travail isolé lorsque nous le publiions, représentait pour nous un des rouages d'un ensemble que nous avions en vue. Cette pièce, de même que l'arbre ou la roue isolés, devait dès lors subir la retouche qui s'impose lorsqu'il s'agit du montage définitif. Il nous eût été évidemment facile de ne pas montrer au public ces pièces non retouchées, de ne publier le travail qu'après son achèvement. Mais, dans ces conditions, la priorité de l'observation de plusieurs faits nous eût échappé, et, d'autre part, il semblait utile de montrer le développement d'une idée naissante, malgré toutes les faiblesses qui président à l'enfance. Cependant ce dernier point de vue ne correspond pas à la réalité. L'idée que l'on pourrait désigner sous le nom d'embryonnaire, au lieu d'éveiller la curiosité et de pousser à l'examen, ne produit que l'indifférence, si pas davantage.

Le travail que nous présentons aujourd'hui au lecteur est le résultat de la condensation des expériences et des réflexions auxquelles nous nous livrons depuis sept ans sur la nature de l'électricité. Pris *dans son ensemble*, il exprime la conclusion finale à laquelle nous nous arrêtons.

Une méthode semblable nous a guidé dans le travail auquel nous nous sommes livré précédemment sur les phénomènes

calorifiques. Ces recherches sont condensées dans un livre intitulé : « La chaleur » (1876-1894) (1). Elles ont été particulièrement étudiées et ont fait l'objet de travaux de deux physiciens dont le monde scientifique déplore la perte prématurée : Bartoli et Nadejdine. Qu'il me soit permis d'exprimer ici mes regrets et toute ma reconnaissance.

Un chapitre n'avait pas encore reçu, à cette époque (1894), sa forme définitive, celui qui concerne la région critique. Il a été publié peu de temps après en langue allemande (2).

L'expérience que j'ai acquise par cette première publication m'a montré combien il est malaisé de faire adopter des vues et même des faits nouveaux qui contrarient les idées régnantes. C'est seulement à l'heure actuelle que les idées sur le point critique semblent s'orienter en notre faveur. Pour ce qui concerne le présent travail, dont les vues, si elles étaient adoptées, auraient une portée plus considérable, nous ne nourrissons aucune espèce d'illusion; il faudra du temps, peut-être beaucoup de temps.

(1) Desoer, éditeur, Liége.

(2) *Zeitschrift für kompr. und flüss. Gase,* SS. 7, 8, 9; 1898.

INTRODUCTION

Dès l'antiquité, les philosophes naturalistes ont tâché de se représenter par une image la constitution intime de la matière; de se faire une idée du spectacle qui se développerait sous nos yeux si, possédant le pouvoir de grossir plusieurs milliards de fois une particule matérielle, et de transformer les secondes en siècles, nous voyions, d'une part, apparaître les derniers éléments constitutifs et, d'autre part, si nous pouvions nous rendre compte de la nature des mouvements qui les agitent.

Si nous nous plaçons à ce point de vue, nous voyons la sagacité des physiciens s'attacher particulièrement aux phénomènes calorifiques, dont la cause première se trouverait dans un mouvement d'agitation particulier des éléments. Bernouilli, Clausius, Maxwell, Helmholtz, W. Thomson, Bolzmann, Gibbs et d'autres encore ont enrichi par leur talent cette partie de la physique, et bien que la solution définitive de la question ne puisse être considérée comme donnée, les résultats obtenus présentent déjà un grand intérêt.

Plusieurs tentatives ont été également faites dans le même sens afin de rendre compte des phénomènes électriques. On peut citer celles de Zenger, de Maxwell, de Lodge, qui nous semblent toutes renfermer une part de vérité.

L'essai que nous avons fait et que nous proposons nous semble permettre la conception de liens entre des propriétés qui jusqu'ici étaient restées étrangères, et il nous a permis de

mettre au jour de nouveaux faits, ce qui, nous le pensons, justifie son utilité.

Ce qui intéressera sans doute le lecteur, c'est que la théorie que nous proposons nous a conduit par un chemin bien différent à la conception de l'*éther gyroscopique* de Helmholtz et à l'*atome vortex* de Thomson ; mais il faudra introduire dans la traduction analytique de notre théorie une fonction de l'orientation des mouvements tourbillonnaires.

On doit à M. Duhem un résumé très clair des idées qui constituent les fondements des théories mécaniques proposées pour expliquer la constitution de l'univers substantiel. Mais, à mon avis, il se dégage de ce travail une connaissance certainement aussi intéressante que celle des théories elles-mêmes : celle de l'état psychique des hommes qui ont contribué et qui contribuent à l'avancement des sciences. Ces hommes se divisent en deux grandes classes : les *synthétistes* et les *analystes*, et l'on peut dire que cette division est telle que ces esprits, lorsqu'ils sont bien dessinés, sont séparés à tel point qu'ils sont absolument incapables de se concevoir mutuellement. Ils ont vis-à-vis les uns des autres des apparences singulières et paradoxales.

Si nous considérons les hommes les plus éminents, le *type analyste* est représenté par Poincaré, Duhem, etc., le *type synthétiste* par W. Thomson (Lord Kelvin), Helmholtz, etc.

Afin de nous faire une idée nette de ces états mentaux, nous laisserons parler M. Duhem... « L'emploi de modèles peut même » devenir indispensable à certains géomètres dont la faculté » d'abstraire est moins puissante que l'imagination ; et parmi » ceux-ci on doit compter quelques-uns des plus grands physi- » ciens de ce temps qui souscriraient à ces paroles de W. Thom- » son : Il me semble que le vrai sens de la question : Compre-

» nons-nous ou ne comprenons-nous pas un sujet particulier de » la Physique? est celui-ci : Pouvons-nous faire un modèle » mécanique correspondant? Je ne suis jamais satisfait tant que » je n'ai pu faire un modèle mécanique de l'objet; si je puis » faire un modèle mécanique, je comprends; tant que je ne puis » pas faire un modèle mécanique, je ne comprends pas.

» De telles exigences intellectuelles, une pareille identifica- » tion entre les deux mots *comprendre* et *imaginer* surprennent » grandement, j'oserais presque dire : scandalisent ceux qui » peuvent comprendre sans le secours de représentations » géométrique ou mécanique. »

S'il m'était permis d'exprimer mon sentiment, je dirais qu'en substituant au mot *modèle* le mot *image*, il m'est *tout à fait impossible* de concevoir les choses autrement que W. Thomson. La conclusion finale peut se résumer en disant qu'il existe des intelligences qui sont incapables de se concevoir mutuellement; leurs sentiments, leurs aspirations, leurs modes de conception ne se ressemblent *en aucun point.*

Pour les uns, la recherche d'une interprétation mécanique de la nature se réduit à un enfantillage; pour d'autres, c'est le seul but de leurs aspirations; cette pensée, cette espérance peut se comparer à cette consolation que semble rencontrer l'homme naturellement religieux, dans ses méditations.

Où est la vérité? L'univers est-il interprétable mécaniquement? Aucun raisonnement rigoureux ne pourrait en donner la preuve; c'est une *croyance* indispensable au *synthétiste.* Mais il serait aussi impossible à l'*analyste* de démontrer qu'il en est autrement, car ce que nous voyons semble bien indiquer l'existence d'un mécanisme très parfait, probablement très simple. Et en se plaçant au point de vue pratique, on peut dire

que ce sentiment de *croyant* a conduit à des découvertes de premier ordre.

L'esprit qui nous a guidé en écrivant ce travail est exactement le même que celui qui a guidé Lodge dans son livre intéressant : « Les théories modernes et l'électricité ». Voici du reste des réflexions que nous extrayons de la préface de cet auteur :

« Il y a peu de choses dans toute la Physique qui paraissent » plus certaines que celle-ci, que ce qu'on a longtemps appelé » Électricité est une forme ou mieux une manifestation de » l'éther.

» Les termes *électrisation* et *électrique* peuvent subsister, mais » le mot Électricité doit disparaître peu à peu... La chaleur a » été prise d'abord pour une forme de la matière; on sait main- » tenant que c'est une forme de l'énergie, mais qu'est-ce que » l'énergie? L'électricité a également passé pour une forme de » l'énergie, mais on a montré que c'était une forme de » l'éther. » Cette pensée était du reste également adoptée par Edlund.

Les remarques du traducteur M. E. Meylan sont fort intéressantes. C'est ainsi qu'il dit : « ... Les premiers modèles méca- » niques de M. Lodge feront peut-être sourire le lecteur fran- » çais pas habitué à de semblables conceptions. » Nous pensons que des considérations semblables aux siennes n'auraient produit qu'une profonde indifférence, si elles avaient été formulées par une personne appartenant à un peuple où les sciences sont moins en honneur qu'en Angleterre.

Le traducteur fait ensuite observer que « M. Poincaré a » montré qu'il était illusoire (le mot *oiseux* est peut-être plus » caractéristique) d'espérer jamais connaître la nature réelle de » ce milieu (électrique), car dès que l'on aura trouvé une

» solution, on pourra en imaginer une infinité d'autres qui » satisferont aussi bien aux conditions mécaniques. »

Je suis disposé à croire que la pensée de l'illustre mathématicien est juste, si l'on désigne sous le nom de théorie nouvelle chacun des termes des phases de l'évolution d'une conception fondamentale; mais je pense que la forme sous laquelle elle est présentée peut donner lieu à des interprétations qui ne correspondent pas à la pensée de son auteur. Il est peu probable, en effet, que celui-ci puisse avoir l'idée de contester l'hypothèse d'après laquelle on admet que la lumière correspond à une oscillation, et je vois encore moins l'infinité d'hypothèses que l'on pourrait substituer à celle-ci. De la même manière, si en se basant sur l'observation et sur le raisonnement, on arrive à montrer que le phénomène électrique correspond au tourbillon, cela sera certainement tout aussi intéressant, et la possibilité d'une infinité d'hypothèses nous échappe tout aussi bien.

Cependant le traducteur ajoute : « Cela ne veut pas dire qu'il » faille renoncer à ces recherches, car il est bien certain qu'une » solution un peu générale serait un puissant moyen d'investi- » gation et permettrait de soupçonner l'existence de phéno- » mènes encore inconnus, comme on en a vu des exemples » éclatants avec la théorie mécanique de la chaleur et la » théorie cinétique des gaz. »

Ces paroles sont un peu plus encourageantes, mais il faut bien dire que si les analystes étaient parvenus à communiquer le sentiment de désespérance qui imprègne tous leurs écrits, bien des découvertes n'auraient jamais vu le jour.

Nous ne pensons pas être mauvais prophète en disant que la suite des temps montrera de plus en plus combien serait funeste

ce découragement, je dirais cette espèce de lâcheté vis-à-vis de l'inconnu, s'il s'emparait de tous les êtres pensants.

Dans l'étude de la nature, la vérité n'apparaît pas dès l'origine dans toute sa splendeur et tout d'une pièce, de même que, dans le monde mathématique, elle se montre progressivement, souvent voilée et avec une grande lenteur.

En écrivant ces lignes, nous pensons avoir montré quelle sera la voie qui sera suivie par les électriciens de l'avenir. Nous sommes soutenu dans cet espoir par l'adoption déjà générale de vues que le Dr Gustave le Bon et moi avions soutenues les premiers. Bien que plusieurs physiciens n'aient pas cru devoir tenir compte de cette particularité, le fait n'est pas moins encourageant pour moi. Mais, d'autre part, la tâche sera longue et difficile, car si certaines parties de la question nous apparaissent maintenant clairement, d'autres suscitent encore des difficultés considérables. Ce sont celles-là qui découragent les analystes, mais certainement bien à tort, car telle question qui nous apparaît maintenant comme obscure apparaîtra probablement dans toute sa clarté lorsque le *temps* aura mûri l'idée nouvelle. En se plaçant à un autre point de vue, on peut dire que la *physique qualitative* qui sert de fondement à la physique quantitative moderne, résultat des travaux de Faraday, n'est pas achevée. Bien des faits n'ont pas été vus ou ont été incomplètement observés. Il est donc urgent d'y revenir avant de poursuivre la construction de l'édifice quantitatif, dont les lézardes résultant de l'insuffisance de base se montrent chaque jour plus profondes.

PRODROME

DE LA

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

L'ÉLECTRICITÉ

CHAPITRE PREMIER.

Phénomènes électrostatiques.

Contrairement à la manière dont les phénomènes électriques ont été présentés jusqu'à présent, nous introduirons en tête de ces développements une hypothèse fondamentale que le lecteur pourra considérer comme fictive ou comme réelle, suivant les sentiments qui le guident, hypothèse qui nous servira de fil conducteur, ainsi que cela se fait pour d'autres chapitres de la physique.

§ 1. — *Hypothèses.*

Il résulte de l'ensemble des connaissances que nous possédons actuellement sur la nature de l'électricité qu'une hypothèse

capable de rendre compte du mécanisme de ce phénomène doit, à la fois, posséder en elle : 1° la notion d'orientation; 2° la notion de pressions et de dépressions d'éther (Franklin, Lodge, etc.); 3° elle doit tenir compte du caractère tourbillonnaire que présentent un grand nombre de ces manifestations (Zenger).

Nous admettrons que l'élément matériel auquel nous donnerons le nom d'*ion* (il ne s'agit évidemment pas du dernier élément métaphysique) se compose, dans sa conception la plus simple : 1° d'un élément substantiel rectiligne *ab* (fig. 1), auquel nous donnerons le nom de *bâtonnet;* 2° de deux tourbillons circulaires, plans α, β, d'éther condensé dont les centres correspondent avec chacune des extrémités *a, b* du bâtonnet. Nous désignerons ces tourbillons sous le nom d'*électrons.*

Si ce système vient à être soumis extérieurement à une pression d'éther p, les électrons prennent la forme conique α', β', et réciproquement cette forme tourbillonnaire est accompagnée d'un accroissement de pression dans l'éther ambiant. Une dépression de l'éther amènera la déformation inverse α'', β''.

A l'inflexion α', β' correspond une tension d'autant plus grande que l'angle γ est plus petit. Nous désignerons la tension α', β' sous le nom de tension positive, et nous admettrons qu'à cette manifestation correspond une charge électrique positive.

Inversement, nous admettrons qu'à l'inflexion α'', β'' correspond une tension électrique négative.

Lorsque deux électrons *e*, *e'* (fig. 2) sont orientés de manière que la partie concave coïncide avec la partie convexe, ces deux tourbillons électroniques se raccordent par l'intermédiaire de l'éther ambiant. L'axe du tourbillon éthéré ainsi produit représente la ligne de force électrostatique, et il se produit une attraction mutuelle des électrons.

Si deux électrons convexes ou deux électrons concaves (fig. 3) sont en regard, il se développe une répulsion. L'électron constituerait le médium entre la substance matière et la substance éther.

Nous tâcherons, plus loin, de justifier ces hypothèses dans un

chapitre spécial. Si nous les admettons, nous pouvons définir l'électricité en disant que *c'est une forme de l'énergie d'orientation des éléments matériels gyrostatiques.*

§ 2. — *L'électrisation par friction.*

Si l'on vient à frotter l'une contre l'autre certaines substances n'ayant pas la même constitution physique ou chimique, désignées sous le nom de substances non conductrices, ou encore sous le nom de diélectriques (soufre, verre, gutta-percha, suie, peau de chat, etc.), on remarque qu'après cette friction, ces corps deviennent susceptibles d'attirer des corps légers. On dit alors que ces corps sont électrisés.

Comme nous le verrons, il existe bien d'autres manières de produire ce phénomène. Qu'il nous suffise pour le moment d'indiquer celle-ci, qui se conçoit aisément par cela que ces frictions ayant pour effet, d'abord de déformer les électrons et ensuite de les orienter, dans le sens positif ou négatif, suivant la nature des substances mises en jeu, il pourra en résulter une disposition telle que celle que nous indiquons figure 4. Cette disposition se produira d'autant plus aisément qu'une fois réalisée, il se développe une attraction mutuelle entre les électrons de signes contraires.

Il est intéressant de se demander si le frottement a pour résultat de déterminer à la fois la déformation des électrons et l'orientation des ions, ou si ce dernier effet intervient seul, la tension électronique étant préexistante.

Nous verrons plus tard qu'il existe une certaine orientation électronique préexistante pour presque tous les corps, mais que cette tension est relativement très faible, si on la compare à celle qui est développée par le frottement. Nous pouvons donc admettre ici pratiquement qu'elle n'existe pas. Cela étant, si nous considérons, par exemple, deux ions $\alpha\alpha'$, $\alpha_1\alpha_1'$ (fig. 5) placés à la surface de séparation des deux surfaces frottantes ; si la surface supérieure est la moins déformable et se déplace dans le sens de

la flèche, le frottement aura pour résultat de produire la déformation *b*. La tension négative de $\alpha_1\alpha'_1$ l'emportera sur la tension négative de $\alpha\,\alpha'$, et, dès lors, le mouvement tourbillonnant résultant de l'ensemble (transmis par l'éther intermédiaire) correspondra à la phase *c* lorsque l'équilibre se sera établi. Cette interprétation est vérifiée par l'expérience, car *c'est, en général, le corps dont les particules sont le plus facilement changées de place qui s'électrise négativement. Si les substances sont de même nature, c'est le corps le plus chaud qui prendra ce signe.*

Cette propriété de certains corps de s'électriser par frottement était connue dès l'antiquité; c'est ainsi que Thalès, six cents ans avant notre ère, en fait déjà mention.

Les deux électricités développées par le frottement et de signes contraires sont en quantités égales. Il suffit, en effet, de mettre simultanément en contact avec le plateau d'un électroscope la surface frottée et la surface frottante pour constater que la somme de ces deux électricités est algébriquement nulle et ne produit aucune déviation.

Afin de charger d'électricité un corps conducteur, il faut donc d'abord le séparer du sol conducteur par un non-conducteur et le mettre ensuite en rapport avec une source d'électricité produite par les moyens dont nous nous occuperons.

§ 3. — *Électrisation par contact.*

Dans ce que nous venons de dire, nous avons supposé que les électrons étaient initialement neutres; en réalité, il n'en est pas toujours absolument ainsi. C'est même l'existence de cette tension préexistante, variable avec la nature de la substance simple que l'on considère, qui est l'origine des réactions chimiques, de la formation des systèmes moléculaires. Disons cependant que cette tension électrique est toujours très faible relativement aux tensions qu'on est habitué de considérer en électrostatique.

Les substances simples ont été divisées en deux grandes classes : les substances électro-positives, les métaux, en général,

dont l'ion sera représenté par la figure $\leftarrow\!\!-\!\!\rightarrow$; les substances électro-négatives, les métalloïdes, en général, dont l'ion sera représenté par la figure $>\!\!-\!\!<$. Afin de faire apparaître le phénomène électrostatique, il suffira donc d'orienter ces ions normalement à la surface. C'est la condition que l'on peut réaliser en établissant le contact avec une substance de nature différente.

Considérons une substance électro-positive dont les électrons superficiels sont représentés par les tourbillons positifs *a* (fig. 6), par exemple une surface de sodium, et supposons que l'on vienne à approcher une surface dont les électrons sont neutres (vraisemblablement le carbone) ; dans ces conditions, le mouvement de giration se communiquant de *a* à *b* déterminera la forme *b'*, c'est-à-dire une charge négative équivalente. Si l'électron *b* était déjà positif, mais moins positif que *a* (fig. 7), ce sera ce dernier qui l'emportera, et l'on obtiendra toujours le même résultat, mais une tension plus faible.

Le métal le plus électro-positif sera donc celui qui prendra l'électricité positive. Les métaux se rangent dans l'ordre suivant : Na, Mg, Zn, Pb, Sn, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Graphite. Chacun d'eux devient positif lorsqu'il est mis en contact avec le suivant. C'est là une constatation importante, car nous verrons qu'il en est autrement dans l'électrisation par frottement de surfaces métalliques qui détermine le phénomène du courant.

Il est inutile de dire que si la surface vient à condenser un gaz, les propriétés superficielles pourront être modifiées.

Si l'on vient à séparer les deux surfaces, l'orientation des électrons, normalement à celle-ci, peut se maintenir, et ces surfaces prendront dès lors respectivement les caractères de l'électricité positive et de l'électricité négative.

§ 4. — *Champ électrostatique.*

Nous avons vu, lorsque nous nous sommes occupé de l'hypothèse fondamentale, que le mouvement tourbillonnaire électronique d'éther condensé était susceptible de se propager dans

l'éther du vide. L'axe de ces tourbillons ab, $a'b'$ (fig. 8) est désigné sous le nom de ligne de force.

L'espace environnant le corps électrisé et occupé par les lignes de force a été désigné sous le nom de champ *électrostatique*.

Si l'espace environnant est vide, les lignes de force se propagent indéfiniment, et nous dirons alors que *le champ est non raccordé*.

Si, au contraire, nous considérons des charges négatives placées en face de charges positives, les tourbillons électroniques se raccorderont par l'intermédiaire de l'éther du vide et se comporteront comme des cordons élastiques tendus (fig. 9). Nous aurons réalisé alors le *champ électrostatique raccordé*.

Si les charges électrostatiques étaient de même signe, le raccordement ne se ferait pas et le champ serait *non raccordé*.

Nous verrons plus loin que les champs raccordés et non raccordés jouissent de propriétés très différentes.

Si l'on considère deux sphères voisines (fig. 10), électrisées, de signes contraires, les lignes de force se disposent à peu près comme nous l'indiquons et l'on remarque que les charges sont plus denses sur les faces a, b, qui sont opposées l'une à l'autre.

Les lignes électriques tendent également à rester séparées les unes des autres, ainsi que le dessin l'indique et ainsi que cela résulte de l'hypothèse tourbillonnaire, comme nous le verrons plus loin.

Afin de reconnaître la direction de ces lignes de force, il suffit de disposer horizontalement une légère aiguille en papier sur un pivot vertical et de placer celle-ci dans le voisinage du corps électrisé; son orientation indiquera le sens de la ligne de force.

§ 5. — *L'influence électrostatique* (1).

Le phénomène de l'influence a été découvert par John Canton, en 1753. Considérons un corps électrisé, par exemple le conducteur d'une machine électrostatique (fig. 11). A une cer-

(1) Les mots *influence* et *induction* ont été souvent confondus. Dans cet ouvrage, ils ont des significations tout à fait différentes.

taine distance, plaçons un conducteur allongé B *en ayant soin de placer dans le voisinage immédiat de* A *une lame non conductrice,* par exemple une lame de verre ou une lame d'ébonite L, laquelle transmet le phénomène de l'influence et qui, pour cette raison, a été désignée sous le nom de *diélectrique.* On remarque que si A prend une charge positive, par exemple, l'extrémité *a* se charge négativement, l'extrémité *b* positivement, l'espace intermédiaire *c*, désigné sous le nom d'espace neutre, n'indique aucune charge. Si, enfin, on enlève la charge A, B revient à l'état neutre.

Nous voyons que le mouvement tourbillonnaire des ions de A est capable de se transmettre par l'intermédiaire de l'éther ambiant et d'orienter les électrons de B, de manière à amener la disposition que nous indiquons figure 12.

Si l'on vient à mettre *b* en communication avec un conducteur présentant de grandes dimensions, par exemple avec la terre, dont la surface peut être considérée comme infinie, les ions orientés *b* se répandront sur cette surface et *b* reviendra à l'état neutre. Au contraire, les ions *a* continueront à être sollicités par A et l'électricité répandue en *a* a été désignée sous le nom d'*électricité dissimulée,* par cela que si *a* est très rapproché de A, on ne peut plus reconnaître son existence. Mais si l'on vient à décharger A, l'électricité négative *a* se répand sur tout le conducteur B et devient apparente.

Si l'on substitue au conducteur fixe B une balle de sureau suspendue à un fil de cocon, l'attraction développée par l'influence ne tarde pas à attirer la balle de sureau vers le conducteur A, par cela que les électricités de noms contraires s'attirent. Que A soit positif ou négatif, les choses se passeront toujours de la même manière, il y aura toujours attraction. Telle est l'expérience que l'on désigne sous le nom d'expérience du pendule électrique.

Si, enfin, nous disposons la balle de sureau *b* entre deux conducteurs électrisés de noms contraires (fig. 13) et ayant la même tension électrique, elle sera en équilibre si la distance des deux conducteurs est la même.

Nous allons voir que les choses se passent tout autrement dans le phénomène de l'*induction*.

§ 6. — *L'induction électrostatique.*

L'induction électrostatique est un phénomène tout différent que nous avons mis en lumière en nous basant à la fois sur la théorie et sur l'expérience. Nous avons vu, lorsque nous avons formulé nos hypothèses fondamentales, que l'orientation positive déterminait dans l'espace ambiant un accroissement de pression de l'éther, que l'orientation négative déterminait une dépression de ce milieu et que réciproquement tout accroissement de pression de l'éther avait pour effet de déterminer l'orientation positive, toute dépression, l'orientation négative. Cela étant, si l'on vient à approcher un ion A orienté positivement, par exemple d'un corps B à l'état neutre (fig. 14), ce dernier s'électrisera aussi positivement et conservera cette charge lorsque A aura cessé d'agir.

Lorsque l'on électrise par frottement dans les machines de cette espèce ou en déplaçant des charges électriques les unes par rapport aux autres, les actions réciproques des électrons amènent des vibrations de ceux-ci à peu près par le même mécanisme que les vibrations d'une corde par l'action de l'archet.

Ces vibrations ont ensuite pour résultat de déterminer des actions répulsives réciproques en vertu de l'effet découvert par Bjerckness, si elles sont concordantes. Il résulte de cette circonstance que pendant la marche des machines à frottement ou à plateaux tournants, des ions s'échappent du conducteur suivant la direction de la flèche, par exemple (fig. 15), et déterminent, si l'orientation est positive, un accroissement de pression considérable de l'éther dans l'espace E, tel que celui que l'on observerait en avant d'un projectile ; à l'arrière se produit une dépression qui tend à rendre le conducteur C négatif, c'est-à-dire à le décharger. Si, au contraire, l'orientation est négative, l'espace E subira une dépression équivalente par suite de l'espèce de suc-

cion due au tourbillon négatif et, à l'arrière, il se développera une pression. C'est afin d'éviter ce mouvement ionique en E que nous avons placé en L une lame diélectrique solide (fig. 11). Ajoutons encore que si la tension devient suffisante, les projections ioniques atteignent une intensité telle qu'elles deviennent luminescentes. Elles sont alors désignées sous le nom d'aigrettes, et les ions, en entraînant l'air, déterminent le phénomène que l'on désigne sous le nom de vent électrique. Le courant d'air ainsi produit se développe dans le même sens, que l'orientation soit positive ou négative, mais les courants sont de sens contraires lorsqu'il s'agit des courants d'éther, ainsi que cela résulte de ce que nous venons de dire.

Si donc on vient à disposer dans l'espace E (fig. 15) un conducteur C′ à l'état neutre, — et il importe de ne pas oublier que cet espace peut être complètement séparé du milieu ambiant par un écran diélectrique L′ placé maintenant à une certaine distance du conducteur C, pour ne pas empêcher le mouvement des ions, — on remarque que ce conducteur prend une charge de même signe que C, ainsi que la théorie le prévoit. Cette charge n'est, comme on le voit, nullement communiquée par des particules d'air électrisées émises par le conducteur C et entrant ensuite en contact avec le conducteur C′, ainsi que cela est implicitement admis dans l'ancienne théorie, car la lame L′ ne peut leur livrer passage.

On peut vérifier le fait par l'expérience en utilisant simplement la disposition que nous venons d'indiquer et en enfermant pour plus de précaution le conducteur C′ dans une cage diélectrique en verre. Ainsi que nous l'avons dit, des ions s'échappent toujours des conducteurs de la machine en activité, mais il est évident que nous obtiendrons des effets particulièrement énergiques si nous facilitons l'émission des ions en adaptant au conducteur C un plateau muni de pointes. Voici comment nous avons réalisé cette expérience.

Une feuille de carton P, recouverte de feuilles d'étain, était suspendue par des fils de soie (fig. 16). Cette plaque était mise, d'une part, en communication avec un électroscope à feuille

d'or E et portait, d'autre part, sur chacune de ses faces, une feuille d'or *f*. Le tout était disposé sous une cage en verre, afin d'éviter le transport direct de l'électricité à l'électroscope. A une distance de 1 mètre environ se trouvait une plaque métallique munie de neuf pointes et mise en communication avec l'un des pôles d'une machine de Holtz. Lorsque celle-ci était mise en activité, on remarquait que les feuilles d'or *f* collées sur chacune des faces de P s'écartaient, qu'elles prenaient donc de l'électricité de même signe.

L'électroscope permettait d'estimer la tension de la charge.

Des observations faites à l'aide de cet appareil ont conduit aux conclusions suivantes :

1° Les pôles positifs et négatifs développent des charges de même tension.

2° Si la charge est produite pendant un temps très court, elle disparaît lorsque l'aigrette cesse de se produire.

L'induction due à la production de l'aigrette est donc alors égale à celle développée en sens contraire par sa cessation; mais si la charge se prolonge pendant quelque temps, l'induction développée pendant cette première phase l'emporte sur l'induction de sens contraire au moment de la suppression de l'aigrette qui est instantanée, et l'électroscope reste chargé.

3° L'induction électrostatique est plus intense si le plan de la plaque P coïncide avec la direction des pointes que si la plaque P est disposée perpendiculairement à cette direction.

4° La tension électrique communiquée à la plaque P croît avec la surface de celle-ci.

C'est ainsi qu'une plaque P carrée de 18 centimètres de côté développait une tension correspondant à 9 divisions de l'électroscope lorsqu'elle était placée perpendiculairement aux pointes et à 14 divisions lorsqu'elle était placée parallèlement à celles-ci.

De même une plaque carrée de 6 centimètres de côté a développé à sa surface, dans les mêmes conditions, des charges correspondant à 5 et à 9 divisions.

Ce fait que l'action est plus intense lorsque le plan de la lame est parallèle à la direction des pointes, est dû à ce que, dans

cette disposition, les deux faces subissent la variation de pression de l'éther, alors que, dans le cas de la perpendicularité, une seule la subit.

L'induction nécessite donc un espace de libre parcours des ions entre C et L'; il en résulte que si la lame d'ébonite L' est mise en contact avec le conducteur C, l'*induction* ne se produira plus, mais nous obtiendrons le phénomène de l'*influence*, ainsi que nous l'avons dit dans le paragraphe précédent.

Nous pouvons résumer les lois de l'induction électrostatique de la manière suivante :

A) 1° Lorsqu'un ion orienté positivement α s'approche d'un ion β, il tend à l'orienter positivement (fig. 17);

2° Si l'ion α s'éloigne de l'ion β, il tend à l'orienter négativement;

3° Si l'ion α est orienté négativement et s'il s'approche de l'ion β, il tend à l'orienter négativement;

4° Si l'ion α s'éloigne de l'ion β, il tend à l'orienter positivement.

B) 1° Quand *plus* s'approche de *plus*, il y a répulsion;

2° Quand *plus* s'éloigne de *plus*, il y a attraction;

3° Quand *plus* s'approche de *moins*, il y a attraction;

4° Quand *plus* s'éloigne de *moins*, il y a répulsion;

5° Quand *moins* s'approche de *moins*, il y a répulsion;

6° Quand *moins* s'éloigne de *moins*, il y a attraction.

La cause de la décharge produite par l'aigrette est, comme nous le verrons plus tard, la même que celle qui préside à la décharge produite par les substances radioactives.

A côté de ces phénomènes d'induction vient se placer une action qui est déterminée par l'entraînement de l'éther du pôle positif vers le pôle négatif et qui dès lors peut même se produire sur un corps qui serait également sollicité dans deux sens opposés soit par les actions d'influence, soit par l'induction.

Si l'on suspend à l'aide d'un fil de cocon une balle de sureau recouverte d'une feuille d'or entre les deux plateaux d'un condensateur et à égale distance de chacun d'eux (les deux pla-

teaux étaient placés à environ 30 centimètres l'un de l'autre), si ensuite ces plateaux sont reliés aux pôles positif et négatif d'une machine de Holtz sans condensateur, *la machine étant préalablement mise en marche avant toute opération*, au moment où l'on retire *brusquement* le déflagrateur de manière à produire l'électrisation instantanée des plateaux, on remarque que *la balle de sureau est fortement projetée vers le plateau négatif.* Elle serait évidemment en équilibre si l'influence intervenait seule. Nous avons d'ailleurs constaté que le même effet continue à s'observer, alors que l'on déplace considérablement la balle de sureau soit vers le plateau positif, soit vers le plateau négatif. Or si, dans ces conditions, on remplace la balle de sureau par une petite sphère conductrice fixe, mise en communication avec un électroscope, on observe que les charges ainsi produites sont de noms contraires dans les deux positions considérées; elles correspondent à l'induction examinée plus haut. Nous avons vu que si le phénomène de l'influence intervenait, les mouvements correspondraient toujours à une attraction dirigée vers le plateau le plus rapproché.

Si l'état de l'atmosphère se prête à l'expérience, on peut même réussir avec un seul plateau ; le plateau négatif attire, le plateau positif repousse. Si l'on remplace les plateaux de condensateurs par des plateaux munis de pointes, ces actions peuvent se développer à plus grande distance. Pour éviter l'objection possible d'une action du souffle électrique, on peut suspendre la balle de sureau à l'intérieur d'un verre de lampe, mais il ne faudrait pas utiliser trop longtemps le même verre, car celui-ci, en s'électrisant lui-même, peut amener des perturbations.

L'expérience réussit plus sûrement encore si l'on suspend à l'aide de deux fils de soie un fil métallique très fin d'environ 10 centimètres de longueur et de manière à faire coïncider sa direction avec les lignes de force. On le voit toujours repoussé par un conducteur positif et attiré par un conducteur négatif.

L'espèce de succion développée par l'électricité négative peut se montrer d'une manière plus suggestive encore en appliquant une méthode basée sur un fait observé en 1853 par M. Srtsezek.

Ce physicien avait reconnu que si l'on abandonne de légères feuilles d'or dans le voisinage de conducteurs électrisés, celles-ci demeurent en suspension dans l'atmosphère en s'orientant suivant la direction des lignes de force; elles sont de plus généralement animées de mouvements de giration rapides qui témoignent une fois de plus de la nature tourbillonnaire de l'énergie électrique. Cela étant, nous avons disposé les deux plateaux d'un condensateur à 30 ou 40 centimètres l'un de l'autre; ceux-ci étant mis en communication avec les deux pôles d'une machine de Holtz, nous avons abandonné dans l'espace intermédiaire une feuille d'or présentant la forme d'un losange allongé (0.5 centimètre de largeur sur environ 3 centimètres de longueur). Nous avons alors observé le phénomène qui vient d'être décrit, mais la feuille d'or est invariablement retenue dans le voisinage du plateau négatif par suite du vide éthéré qui s'y manifeste. Nous verrons plus loin que les ions libres se comportent de la même manière, qu'il se produit un transport tout spécial de ceux-ci du pôle positif vers le pôle négatif.

Approfondissons un peu plus le phénomène et considérons une pointe négative *p* (fig. 18) émettant des ions suivant la direction de la flèche *f* barbelée. Cette action déterminera une réaction qui tendra à déplacer la pointe en sens contraire, de manière à permettre la réalisation d'un tourniquet électrique. Mais à cette action résultant de l'émission de masses ioniques s'en ajoute une autre, celle de la succion d'éther tourbillonnant développée par les ions en mouvement. Cette succion se produit suivant la direction de la flèche *f'*. Il en résulte que la pointe *p* ne sera pas seulement repoussée par l'effet de l'inertie des masses ioniques, mais encore par le courant d'éther développé suivant la direction *f'*.

Si, au contraire, nous considérons une pointe positive, le courant d'éther développé par les ions en mouvement et détachés du conducteur sera dirigé en sens contraire et ne butera plus contre la pointe de manière à la faire rétrograder.

Il résulte de cette circonstance qu'une pointe négative, toutes choses étant égales, sera plus fortement repoussée qu'une pointe

positive. Dès lors, si nous considérons la feuille d'or en suspension entre les deux plateaux d'un condensateur, la pointe p sera plus fortement repoussée que la pointe p' et elle se maintiendra toujours dans le voisinage du pôle négatif.

La cause du transport des ions de préférence du pôle positif vers le pôle négatif nous apparaît clairement.

§ 7. — *Le courant.*

Il résulte de l'ensemble de ces faits cette conclusion importante que l'*influence* et l'*induction électrostatiques* constituent des effets capables de transmettre l'énergie électrique d'un point à un autre de l'espace. Pour ce qui concerne le phénomène de l'*influence* dans l'exemple que nous avons considéré, une charge positive s'est transmise de A à *b* (fig. 11). Adoptant le langage de Maxwell, nous dirons qu'il y a eu *courant instantané*, la charge *b* est devenue disponible, mais une fois utilisée, les choses en restent là.

Dans le phénomène de l'*induction électrostatique*, il y a, au contraire, transmission continue de charges d'un point à un autre de l'espace. Nous dirons alors qu'il y a *courant continu*.

Le transport de l'énergie par le courant est dès lors comparable à celui qui serait effectué par un arbre de transmission animé, d'une part, d'un mouvement de rotation rapide autour de son axe et, d'autre part, d'un mouvement de déplacement dans le sens longitudinal. Ce dernier mouvement s'arrête après un instant dans le phénomène de l'influence ; il est continu dans le phénomène de l'induction électrostatique.

§ 8. — *Machines électriques.*

L'*électrophore* est la seule machine employée dans la pratique dans laquelle n'intervient que le phénomène de l'influence. Il se compose d'un plateau de résine que l'on électrise par frottement à l'aide d'une peau de chat. Si l'on superpose à celui-ci un

plateau conducteur muni d'un manche isolant, ce plateau s'électrise par influence. On élimine l'une des charges en touchant le plateau conducteur du doigt. Si l'on enlève ensuite ce dernier, il reste chargé de l'électricité qui était dissimulée.

Limite de charge. — Un conducteur ne peut recevoir qu'une charge limitée. Si l'on dépasse cette limite, l'électricité ou les ions que nous avons considérés se précipitent dans le milieu ambiant pour donner naissance à l'aigrette et à l'induction électrostatique dont nous avons parlé. Ce phénomène se manifeste pour des charges très faibles lorsque le conducteur est muni d'une pointe. C'est cette dernière qui est le siège de cet écoulement particulier qui correspond à la figure 15.

Machine de Ramsden. — L'appareil se compose d'un plateau de verre, serré à sa périphérie entre quatre coussins, mis en communication avec le sol. Le plateau est animé d'un mouvement de rotation à l'aide de la manivelle et s'électrise positivement.

Un conducteur muni de pointes est placé dans le voisinage du plateau et s'électrise par influence. La charge négative atteint, grâce aux pointes, immédiatement la limite de charge et donne naissance à une aigrette négative, laquelle tend constamment à neutraliser la charge du plateau de verre par induction électrostatique. La charge positive reste sur le conducteur. Mais il importe de remarquer que pendant tout le temps de la marche, l'induction électrostatique maintient l'énergie positive du conducteur dans l'état dynamique particulier donnant lieu à l'effet Bjerckness et aux projections ioniques dont nous avons parlé plus haut, de telle manière que, si l'on vient à approcher un conducteur isolé, celui-ci s'électrise, en général, par induction et non par influence, ainsi que nous l'avons vu.

Nous verrons également que ces oscillations électroniques qui donnent lieu à l'effet Bjerckness, peuvent déterminer à distance une *électrisation oscillante* qui n'est pas produite par l'influence ou par l'*induction électrostatique*.

Machines à disques tournants. — La machine de Ramsden représente un appareil dans lequel intervient à la fois le phéno-

mène de l'influence et de l'induction. Dans la machine de Wimshurst, l'induction intervient seule.

Le déplacement des ions est déterminé ici par la rotation d'un disque en verre à la périphérie duquel sont collées un certain nombre de feuilles conductrices δ (fig. 19).

Supposons d'abord, afin de rendre l'explication claire, que le conducteur *c* possède une charge positive, le point *b* étant à la terre par le contact du petit balai. Les éléments du secteur *bc* en s'approchant de *c* prendront une charge positive, et réciproquement renforceront la polarité positive de *c*. En parcourant l'espace *cd*, les éléments du disque en s'écartant tendront à produire le phénomène inverse ; mais *bc* étant plus grand que *cd*, c'est le premier effet qui l'emportera.

Remarquons maintenant que les points δ s'écartant du secteur *dc* électrisé positivement, s'électriseront négativement, et le conducteur *e* s'électrisera négativement par l'approche des éléments négatifs du secteur *de*. En *eb*, les choses se passeront comme en *dc*.

Pour ce qui concerne le disque placé derrière le premier, dont la rotation s'exécute en un sens contraire, ce sera la moitié du disque *d'cb'* (fig. 20) qui sera positive, et le raisonnement à faire est le même que pour le disque d'avant.

Il résulte de cette théorie qu'une machine formée d'un seul plateau doit fonctionner. Nous avons constaté qu'il en était ainsi, mais les charges réalisées sont faibles. On peut reconnaître leur présence et leur polarité à l'aide d'un plan d'épreuve et d'un électroscope. Afin de réaliser l'expérience, il suffit de rendre les plateaux solidaires, de manière à les faire tourner ensemble, et de disposer parallèlement les tiges *bd* et *b'd'*.

Nous avons également remarqué que si l'on vient à déterminer une rotation du disque en sens contraire après avoir communiqué une charge au conducteur A, la réciproque a lieu : la machine se décharge.

Le renforcement considérable réalisé à l'aide des deux plateaux est dû à la circonstance suivante : Indiquons en pointillé (fig. 21) ce qui se rapporte au plateau d'arrière et considérons

la partie droite de la machine, par exemple. Le secteur *b'od* est positif pour les deux plateaux; dès lors un élément α du plateau antérieur deviendra non seulement positif par cela qu'il s'approche du conducteur positif *c*, mais surtout parce qu'il s'approche du centre de figure de la surface électrisée positivement *b'od*; cette action commence du reste à se faire sentir en α_1, et il en sera de même du disque d'arrière pour un point α' et α_1'. Le même raisonnement est applicable à la partie gauche négative. Il résulte de cette considération que le rendement de la machine sera d'autant meilleur que les plateaux seront plus rapprochés.

Remarquons encore que dans cette conception, les ions sont supposés normaux à la surface des disques.

L'amorçage de la machine, au lieu de s'exécuter comme nous venons de le dire, est généralement spontané, il résulte du frottement des petits balais placés à l'extrémité des tiges inclinées *bd*, *b'd'*. Mais il est inutile de dire que la polarité se développera au hasard dans un sens ou dans l'autre, suivant que l'un ou l'autre frottement prédomine à l'origine. Si l'on veut obtenir une polarité déterminée, il faut, comme nous l'avons dit, charger légèrement l'une des bouteilles de Leyde A ou B au moment de la mise en marche.

Machine de Holtz. — Le principe de la machine de Holtz est identique au précédent; l'amorçage est intéressant. Un élément α (fig. 22) du plateau mobile, en s'approchant de la pointe du conducteur δ positif, monté sur le plateau fixe, s'électrise énergiquement, positivement. Il en sera ainsi tant que ces éléments α seront soumis à l'action de la pointe δ, mais dès que ces éléments auront dépassé cette position δ, cette action deviendra négligeable et ils conserveront dès lors leur charge positive. Si le conducteur était muni de deux pointes dirigées en sens contraires (fig. 23), au moment où l'élément α aurait dépassé δ', son mouvement d'éloignement déterminerait une induction de sens contraire, qui réduirait la première à néant.

La machine une fois amorcée, on voit que le plateau, après avoir abandonné sa charge positive au conducteur *b* par l'inter-

médiaire d'un peigne, deviendra négatif par cela que les points de ce plateau s'écartent d'une charge positive *b*; pendant le parcours *cd*, ils deviendront encore négatifs par cela qu'ils s'écartent d'une charge positive et qu'ils se rapprochent d'une charge négative δ' et *d*. L'inverse aura lieu pour la demi-circonférence inférieure.

Électrisation par frictions longitudinales. — Volpicelli, en déterminant des frictions dans un sens unique sur un cylindre en cuivre recouvert de résine, à l'aide d'un anneau en cuivre A, est parvenu à établir deux polarités différentes aux extrémités *a* et *b* (fig. 24). Le mécanisme de cette expérience inexplicable dans l'ancienne théorie ne demande pas de commentaires.

Le cylindre conserve cette orientation. Lorsqu'elle est réalisée, si l'on déplace l'anneau dans le sens indiqué par la figure, il s'approche continuellement des électrons orientés positivement et s'écarte continuellement des électrons orientés négativement; il s'électrisera donc par induction positivement, ce que l'expérience vérifie en mettant l'anneau en communication avec un électroscope.

§ 9. — *Les diélectriques ou les substances aniodynamiques.*

On peut admettre qu'un diélectrique *parfait* se comporte comme s'il était formé de molécules complètement isolées les unes des autres. Il en résulte que si l'on vient à électriser par contact les molécules superficielles, ces molécules, étant indépendantes des molécules voisines, conserveront cette charge indéfiniment.

En réalité, les choses ne se passent jamais absolument ainsi : elles se passent comme si ces molécules étaient assimilables à de petits conducteurs isolés, mais entrant périodiquement en contact. Il en résulte que si l'on électrise la surface d'un diélectrique, cette électricité se transmet au sein de la masse et peut s'y conserver pendant un temps très long. Si l'on vient à électriser à sa surface un morceau de paraffine, par exemple, on

remarque qu'après plusieurs mois un fragment de cette matière présente encore les caractères de l'électrisation initiale.

Un isolant ou un diélectrique *parfait* serait donc composé de molécules formées d'ions, lesquels ions continueraient indéfiniment à faire partie de la même molécule ; c'est la raison pour laquelle nous avons désigné ces substances sous le nom de *substances aniodynamiques*. Dans les diélectriques imparfaits représentés particulièrement par les substances solides, la transmission lente de l'électricité au sein de la masse se produit donc comme s'il s'établissait des contacts périodiques entre de petits conducteurs isolés.

Supposons, par exemple, qu'une molécule *a* (fig. 25) possède quatre ions orientés positivement, par exemple; après le contact avec une autre molécule identique, elles en posséderont chacune deux. Ces substances permettent la transmission de l'influence, raison pour laquelle on les a aussi désignées sous le nom de *diélectriques*. Les choses se passent comme si une série de conducteurs se trouvaient placés à la suite les uns des autres, chaque conducteur représentant une molécule.

§ 10. — *Les conducteurs ou les substances iodynamiques.*

Nous avons vu qu'il existait un mode particulier de transmission de l'énergie électrique auquel nous avons donné le nom d'*induction électrostatique*, lequel mode implique l'existence d'ions orientés en mouvement. Nous avons vu par quel mécanisme il se fait que deux conducteurs placés en face l'un de l'autre et électrisés de signes contraires, se neutralisent réciproquement si l'espace qui les sépare est parcouru par des ions libres, lesquels, dans les cas que nous considérions, étaient engendrés par le gaz ambiant (fig. 15).

Le même résultat est obtenu si l'on interpose entre les deux surfaces électrisées certaines substances solides ou liquides dites conductrices. Nous conclurons donc par analogie que ces corps possèdent dans leur masse des ions libres en mouvement, que

chaque molécule de ces corps est formée d'ions qui n'en font partie que pendant un instant; une permutation perpétuelle des ions qui constituent les molécules de ces corps fait de ceux-ci un système dynamique tout spécial. Nous les avons désignés pour cette raison sous le nom de substances *iodynamiques*.

Lorsque la transmission de l'énergie se fait par saccades, ce sont les ions de la surface, plus libres, qui semblent tout désignés pour cette propagation. L'électricité se transmet alors à la surface. Mais si la transmission de l'énergie est continue, celle-ci se propage également en pleine matière. Le temps est donné alors à ces ions pour qu'ils puissent s'orienter également. Nous nous occuperons de ce mode de transmission dans le chapitre suivant.

Voyons maintenant comment l'énergie se propage à la surface.

Il suffit d'appliquer pour cela à la surface conductrice ce que nous avons dit de la substance gazeuse ionisée, lorsque nous nous sommes occupé de l'induction électrostatique.

Les ions superficiels du conducteur C (fig. 26), α et β, en se précipitant les uns vers les autres, se neutralisent par induction électrostatique. Tel est, du reste, également le phénomène qui se produit si l'on met en contact deux conducteurs électrisés de signes contraires.

Si la tension est suffisante, les ions traversent l'air ambiant en l'ionisant lui-même, et la neutralisation par induction électrostatique se produit dans l'air sous forme d'étincelle ou sous forme d'aigrette.

Considérons un conducteur électrisé A (fig. 27), et supposons que cette électrisation corresponde à deux ions orientés positivement α, α', par exemple. Si nous le plaçons dans le voisinage d'un conducteur β, l'énergie libre d'orientation ne sera pas modifiée, mais elle sera transportée en α_1, α_1' par influence. Les ions intermédiaires seront simplement orientés, ainsi que la figure l'indique, et les électricités e, e', de signes contraires et devenues non apparentes, ont été désignées sous le nom d'*électricités dissimulées*. Si l'on met les conducteurs en contact, elles se reconstituent d'après le mécanisme indiqué plus haut et

l'énergie d'orientation libre correspondant aux deux ions α, α' ou α_1, α_1' se répartira sur les deux conducteurs. S'ils ont même capacité, chacun d'eux possédera une charge correspondant à un ion orienté.

Faisons dès à présent cette remarque importante, que les ions peuvent se déplacer et s'orienter soit normalement à la surface d'un conducteur, soit tangentiellement à celui-ci.

§ 11. — *Le phénomène de l'influence dans les diélectriques.*

Considérons deux lames conductrices A et B (fig. 28), entre lesquelles nous disposerons un diélectrique constitué ainsi que nous l'avons dit. Chaque élément *m*, isolé, se comportera lui-même comme un petit conducteur, ainsi que la figure l'indique. Nous aurions réalisé ainsi l'appareil désigné sous le nom de *condensateur*. En mettant la surface C en communication avec le sol, nous détruirons l'orientation des ions α, qui constituent une charge apparente, mais nous conserverons au sein de la masse les ions orientés à la surface des conducteurs et à la surface des éléments du diélectrique. C'est l'*électricité dissimulée*. La quantité de cette énergie dépendra de la surface des conducteurs, du nombre et de la forme des molécules du diélectrique. Elle sera, *en général*, d'autant plus grande que la densité du diélectrique est elle-même plus grande. On désigne sous le nom de capacité diélectrique la faculté plus ou moins grande de ces corps de recéler de l'énergie électrique. La découverte de la variabilité de cette propriété, lorsqu'on passe d'un diélectrique à un autre, est due à Faraday.

Supposons maintenant que l'on vienne à mettre en communication A et B à l'aide d'une substance iodynamique (fig. 29), par exemple à l'aide d'un conducteur métallique C.

Dans ces conditions, il n'y aura plus seulement orientation des ions superficiels tangentiellement à ce conducteur, mais les mouvements des ions α, β ne tarderont pas à déterminer leur neutralisation réciproque par induction électrostatique. Dès lors, les charges A et B se neutraliseront.

Si le contact entre A et B est établi un instant et si le diélectrique est une substance solide, la désorientation des éléments ne se produit pas instantanément; aussi peut-on déterminer une deuxième décharge beaucoup plus faible après quelques instants. Cette quantité d'électricité a été désignée sous le nom d'*électricité résiduelle.*

§ 12. — *Justification des hypothèses fondamentales.*

Les belles expériences de M. Weyher jettent déjà une vive lumière sur le mécanisme des phénomènes électriques. Ce physicien, en faisant tourner rapidement un tourniquet symétrique A (fig. 30) et en abandonnant dans l'air des corps légers, a remarqué que les spires du tourbillon aérien affectaient la forme figure 30bis.

Remarquons qu'en utilisant un tourniquet symétrique, nous ne nous trouvons pas dans les conditions que nous avons supposées et qui impliquent l'existence de tourniquets dissymétriques. Cependant, nous pouvons déjà tirer de cet examen une remarque importante.

Nous voyons que le tourbillon fermé se compose de deux parties : d'abord d'un tourbillon large et évasé dont l'axe est occupé par un tourbillon de diamètre beaucoup plus petit, dont le déplacement se produit en sens contraire du premier. Dans cette image, le tourbillon extérieur représente le tourbillon négatif et le tourbillon intérieur le tourbillon positif. Nous voyons donc que le tourniquet symétrique réalise à la fois ce que l'on appelle électricité positive et ce que l'on appelle électricité négative.

Mais si nous considérons deux tourniquets dissymétriques T, T', A, B (fig. 31) placés l'un à la suite de l'autre, que va-t-il se passer? Le changement de marche que l'on observait dans la région équatoriale E ne se produira plus. Le tourbillon de grand diamètre continuera sa marche dans le même sens, car la rotation des palettes du sommet du cône *c*, ne pouvant exercer d'ac-

tion sensible, n'entravera plus son mouvement. De même, le tourbillon de petit diamètre circulera librement en sens inverse du premier d'un cône à l'autre.

En un mot, nos tourniquets T et T', qui donnent la représentation de nos électrons, seront reliés par un double système de tourbillons éthérés, l'un positif, l'autre négatif. L'axe de ces tourbillons représente la ligne de force de deux conducteurs électrisés de signes contraires et s'attirant mutuellement.

Considérons maintenant un tourniquet unique orienté, par exemple, positivement (fig. 32). Dans ces conditions encore, les palettes dans le voisinage du sommet du cône en *a* n'exerceront pas d'action sensible et, dès lors, la tendance à l'appel suivant l'axe et vers A sera faible (la partie droite de la figure de M. Weyher est supprimée). La spire d'appel extérieure (partie gauche) subsiste seule; en pénétrant dans l'axe, elle détermine l'émission tourbillonnante positive *t*.

Inversement, si nous considérons le tourniquet orienté négativement (fig. 33) en B, nous verrons les spires extérieures se développer. Mais ici se rencontre une petite difficulté; en effet, on peut admettre, d'après les expériences de Weyher et aussi d'après la représentation précédente, que les spires seront ramenées vers le centre de manière à produire le courant d'appel en sens contraire. Mais nous pouvons remarquer, d'une part, que ces spires ne rencontrent plus la surface du conducteur A, que, dès lors, elles sont libres de se propager; que, d'autre part, le déplacement du tourbillon *t* serait enrayé par la surface matérielle B.

Les expériences que M. Weyher a entreprises dans les liquides ne sont pas moins démonstratives. Nous voyons se produire sous l'action d'un tourniquet placé dans la masse liquide, d'abord un tourbillon de petit diamètre qui se matérialise par la production d'un enfoncement conique à la surface du liquide; ce tourbillon est descendant. Autour de celui-ci s'en développe un autre beaucoup plus large et ascendant. Dans cette image, le tourbillon conique de petit diamètre descendant de la surface, correspond à l'émission tourbillonnante positive; le tourbillon ascendant de

grand diamètre émanant du tourniquet représente l'émission négative.

Nous pourrions évidemment introduire une pointe animée d'un mouvement de rotation rapide dans l'entonnoir apparent sans rien changer aux conditions d'équilibre dynamique. Cette pointe représenterait alors l'électron orienté positivement; le tourniquet, l'électron orienté négativement.

Remarquons maintenant que le raccordement des tourniquets ou des électrons T, T′ ne peut (fig. 31) se faire que pour autant que le sens des rotations soit le même. Si donc nous admettons que le sens de la rotation des électrons superficiels est quelconque, le raccordement se fera entre les électrons dont le sens de la rotation est le même.

Nous voyons donc qu'un champ raccordé (fig. 31) suivant ce mécanisme se compose d'une infinité de tourbillons dont le sens de la rotation est quelconque. Or, il résulte des expériences de Weyher que les tourbillons ayant des rotations inverses s'attirent et que le contraire a lieu si le sens de la rotation est le même. Un semblable système sera donc soumis à une série d'attractions et de répulsions qui détermineront des déplacements latéraux tels que ces tourbillons entreront périodiquement en contact; mais par suite de leur élasticité, ils rebondissent latéralement les uns sur les autres, de manière à présenter l'image d'un système comparable à celui du gaz parfait tel qu'il est conçu par W. Thomson et par Helmholtz. Ce système doué de force expansive se comportera comme si les lignes de force se repoussaient mutuellement, ce qui est conforme à la réalité. Si le nombre des lignes de force atteint une certaine limite, cette action répulsive sera telle que l'équilibre sera rompu, et nous aurons atteint alors la limite de charge. Les ions qui y sont indissolublement liés sont projetés dans le milieu ambiant.

Cela étant, si l'on considère deux conducteurs A et B (fig. 34) électrisés de même nom, émettant des tourbillons de même ordre, incapables de s'emboîter, il se développera des actions répulsives comparables à celles qui se réaliseraient si l'on interposait entre les deux conducteurs un gaz parfait sous pression.

On conçoit également que si l'un des électrons T ou T' n'était pas orienté, il ne tarderait pas à se déformer de manière à réaliser la forme correspondant à l'équilibre (fig. 31), ce qui nous donne la représentation du phénomène de l'*influence*.

Considérons enfin des ions en mouvement émis par l'un des conducteurs et dirigés vers l'autre avec une orientation positive ou négative (fig. 35). Si l'orientation est négative, il se développera un vide, qui déterminera également l'orientation négative sur le deuxième conducteur, et inversement s'il s'agit de l'orientation positive. Nous avons ainsi l'image de l'*induction électrostatique*.

En résumé, chaque ion *libre* qui constitue le *courant* détermine une aspiration et un refoulement de l'éther tourbillonnant. A l'inverse de ce qui se passe lorsque les ions sont orientés sur une surface, le tourbillon central allant du pôle positif vers le pôle négatif existe seul. C'est ainsi que se trouve vérifiée l'idée fondamentale d'Edlund, qui admet que le courant électrique implique l'existence d'un courant d'éther. C'est également l'absence du large tourbillon de retour qui établit la distinction fondamentale entre la ligne de force électrostatique et le courant.

Si nous considérons une série de tourbillons élémentaires, ceux qui possèdent des mouvements de rotation de même sens pourront se grouper de manière à constituer un mouvement tourbillonnant d'ensemble à la surface des corps. *Telle est bien la caractéristique des phénomènes électrostatiques.* L'image des tourbillons donnée soit par les figures de Lichtenberg, soit par l'étincelle, nous fournit en effet la représentation de tourbillons ayant des dimensions tangibles. Ce mouvement d'ensemble implique l'existence d'une vitesse tangentielle, parallèle à la surface électrisée, qui aura pour résultat d'empêcher la propagation de l'orientation des ions normalement à cette surface, c'est-à-dire en pleine matière. Cette manifestation de l'énergie se localisera donc à la surface des conducteurs.

Nous voyons également que la seule différence qui existe entre le raccordement tourbillonnaire électrostatique (fig. 31) et l'étincelle se trouve dans cette circonstance que dans le premier cas le mouvement tourbillonnaire se produit dans l'éther seul ;

dans le deuxième cas, ce mouvement tourbillonnant est suffisamment intense pour entraîner avec lui les ions matériels. Ceux-ci, par leur inertie, ne tardent pas à amortir l'énergie d'orientation électrique qui se neutralise avec dégagement de chaleur.

En général, le tourbillon positif seul s'illumine par l'entraînement des ions, mais nous avons eu la bonne fortune d'observer l'étincelle double ainsi que l'aigrette double, de manière à fournir la représentation exacte du mécanisme que nous venons de décrire. C'est l'observation de cet admirable phénomène qui nous a déterminé à défendre l'hypothèse que nous exposons. On peut dire qu'il appartient à cet ordre de choses que l'on s'habitue trop à *regarder* sans les *voir*. L'aigrette négative présentait l'apparence d'un beau tube tourbillonnant d'environ 2 millimètres de diamètre, sur lequel on distinguait les spires sombres et lumineuses du tourbillon; l'aigrette positive affectait la forme déliée bien connue. Lorsque ces deux manifestations furent suffisamment rapprochées, le filament positif s'engagea dans le tube négatif, de manière à en occuper l'axe, lequel continua à être illuminé par un trait de feu lorsque l'étincelle fut établie. Ce résultat a été obtenu à l'aide d'une bobine à fil secondaire, gros et court.

Il est impossible de réaliser d'une manière plus saisissante l'image que l'expérience de Weyher reproduit.

Si l'on considère le tube tourbillon correspondant à l'étincelle, on peut se demander si celui-ci n'est pas susceptible de se sectionner. Dans ces conditions, les ions animés de mouvements giratoires et définitivement séparés des conducteurs constitueront par leur ensemble de petites sphères indépendantes les unes des autres. Telle est l'expérience réalisée par Planté à l'aide d'une puissante batterie d'accumulateurs, et qui se traduit dans la nature par la production de la foudre globulaire.

L'équilibre de ces masses ioniques tourbillonnantes peut être rompu par un simple choc, dont le résultat est de dissiper l'énergie d'orientation, qui produit les effets de l'étincelle ou de la foudre.

Nous verrons plus loin combien cette remarque est importante, lorsque nous examinerons la nature de l'atome.

M. Zenger montre l'existence de ce mouvement giratoire d'ensemble en faisant tourner une sphère en verre S (fig. 36), disposée sur un axe de rotation *a*. La rotation s'établit lorsque les conducteurs *c*, *c'* sont mis en communication avec les pôles d'une machine électrostatique. Mais une preuve peut-être plus démonstrative et moins accessible à la critique que donne ce physicien, se trouve dans l'examen d'une plaque de verre argenté frappée par la foudre. La reproduction de cette plaque ne demande pas de commentaires ; on voit le tracé de l'hélice en relief à l'intérieur des trous coniques résultant de la fusion produite par l'étincelle.

M. Zenger fait encore jaillir des étincelles à la surface de glaces recouvertes de noir de fumée. Il obtient ainsi des traînées dont l'axe est intact et correspond bien au centre de la tempête.

§ 13. — *Particularités de l'étincelle et figures électriques.*

Lorsque l'étincelle jaillit entre deux conducteurs, il est aisé de voir ce qui va se produire : un courant d'éther va du pôle positif au pôle négatif; ce courant déterminera dans le milieu ambiant un vide éthéré tout à fait comparable au vide d'air que l'on observe dans le voisinage d'une tuyère projetant un jet d'eau sous pression. Si l'on place dans le voisinage une balle de sureau *f*, suspendue à un fil, on remarque que cette balle est vivement attirée vers l'embouchure de la tuyère. De la même manière, cette balle est vivement attirée vers le pôle positif (fig. 37) pendant la production de l'étincelle. Seulement, comme il s'agit ici d'un phénomène éthéré et non d'un phénomène aérien, cette action se transmet au travers des diélectriques, et l'attraction dont nous venons de parler se produit de la même manière si la balle de sureau est suspendue à l'intérieur d'un verre de lampe fermé à ses deux extrémités.

Lorsque l'on atteint la limite de charge, il se développe particulièrement aux pointes, ainsi que nous l'avons dit, des embryons d'étincelle que l'on désigne sous le nom d'aigrettes; l'aigrette positive présente l'apparence de filaments lumineux très déliés,

l'aigrette négative présente en général l'apparence d'un point lumineux. Cependant, dans certains cas, comme nous l'avons vu, l'aigrette négative présente l'aspect d'un tube long et large ; l'aigrette positive a toujours les caractères d'un filament délié.

Figures de Lichtenberg. — Si l'on électrise un plateau de résine par frictions à l'aide d'un conducteur mis en communication avec une machine électrostatique, et si ensuite on saupoudre le plateau de poudre de soufre en agitant un sachet de mousseline renfermant du soufre pulvérisé, celle-ci se dépose aux points électrisés. L'électricité positive fournit l'image de filaments déliés, l'électricité négative détermine de petits disques voisins les uns des autres. Nous pouvons remarquer ici, de même que dans l'étincelle, que chaque tourbillon localisé sur le diélectrique est lui-même formé par l'ensemble d'un très grand nombre d'ions ou tourbillons élémentaires, de manière à réaliser les dimensions considérables que nous constatons.

Si la surface est électrisée à la fois positivement et négativement, les dessins formés se montrent très nettement en saupoudrant avec un mélange de soufre et de minium. Le minium se fixe sur les figures négatives, le soufre sur les figures positives.

Afin de reconnaître quelle est la nature et le mode de répartition de l'énergie électrique dans l'aigrette développée à l'extrémité d'une pointe, nous avons disposé à une distance d'environ 5 millimètres et normalement à son axe une lame de résine (1). La pose est d'environ cinq minutes. Puis nous avons saupoudré la plaque de soufre en poudre au travers des mailles d'un sachet en toile très fine, afin de reconnaître quels sont les points qui sont chargés d'électricité positive, et nous avons opéré ensuite de la même manière à l'aide de minium, afin de reconnaître quels sont les points chargés d'électricité négative, l'expérience n'étant en réalité autre chose que celle de Lichtenberg.

L'énergie développée par la bobine d'induction présentait un

(1) Afin d'obtenir avec facilité des lames de résine, il suffit de couler cette substance sur une feuille de carton; elles ont une épaisseur de 3 à 4 millimètres. Il est bon d'ajouter un peu de cire pendant la fusion, pour éviter que des fentes se produisent.

vif intérêt. On sait, en effet, que chacun des pôles développe alternativement les deux électricités à des tensions différentes. Le pôle qui présente l'aigrette la plus développée possède l'énergie positive à plus haute tension que l'énergie négative et il en est inversement de même pour l'autre pôle.

Si l'on exécute l'expérience indiquée plus haut, on constate la production d'une série d'anneaux concentriques, l'énergie dont la tension est le plus faible occupant toujours le disque central. Il en résulte que l'effluve du *pôle aigrette* (+) prend en section la forme figure 39, les parties hachurées correspondant à l'électricité négative. L'effluve du pôle *non-aigrette* (—) correspond à la figure 40.

Il en résulte que si l'on considère les deux pôles de la bobine munis de pointes et placés l'un vis-à-vis de l'autre, les électricités de noms contraires correspondent.

La reconstitution des deux électricités se fait donc, dans ces conditions, par zones concentriques emboîtées les unes dans les autres.

Nous avons vu que l'étincelle de la bobine est, dans certains cas, formée d'un tube à l'intérieur duquel chemine en sens contraire un filet électrique très délié. Cette expérience montre que le mode de reconstitution par effluve lente se fait par un mécanisme absolument identique.

En faisant usage de l'aigrette de la machine de Holtz dont le pôle non utilisé est mis à la terre, on obtient un disque central A (fig. 41) entouré d'une auréole très étendue. Mais il importe de remarquer que, *quel que soit le pôle utilisé, cette figure est obtenue soit avec le soufre, soit avec le minium.* Seulement le pôle positif ou aigrette condense plus de soufre en A que le minium; l'inverse a lieu en B. La réciproque est vraie pour le pôle non-aigrette.

Figures en relief [1]. — Le plateau étant électrisé par le procédé que nous venons d'indiquer, si l'on approche la surface de résine d'une tôle chauffée (par exemple d'un poële, mais non

[1] Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 2, pp. 66-67, 1901.

pas d'une flamme qui aurait pour effet de décharger le plateau), de manière à produire un commencement de fusion, on voit alors apparaître en relief des figures analogues à celles de Lichtenberg.

Cette première constatation étant établie, les points électrisés apparaissent-ils en creux ou en relief? Afin de résoudre la question, nous avons concentré l'électricité sur une ligne droite à l'aide de deux becs de Bunsen par exemple. Si l'on vient à chauffer le plateau dans ces conditions, on voit que le trait apparaît en creux, *quel que soit le signe de l'électricité.*

Les choses se passent donc comme si les points électrisés d'un signe quelconque exerçaient une pression considérable à la surface du plateau.

La seconde question qui se pose est relative aux figures obtenues par les deux électricités à la surface des plateaux simplement électrisés.

Si l'on se sert d'électricité positive, l'expérience montre, ainsi qu'on devait s'y attendre, une série d'aigrettes moulées en creux. Mais si l'on opère à l'électricité négative à haut potentiel, il se produit un fait inattendu. Des aigrettes absolument comparables aux aigrettes positives se produisent encore, *mais elles apparaissent en relief.* Les parties de la surface qui correspondent à l'aigrette sont donc ici privées d'électricité ; les autres parties sont électrisées, contrairement à ce qui se passe pour l'électricité positive.

Ajoutons que lorsque le potentiel électrique négatif dont on se sert est relativement faible, on remarque à côté des aigrettes une série de cratères déprimés correspondant aux taches circulaires obtenues par le procédé de Lichtenberg.

On peut se demander encore comment il se fait que l'électricité exerce une pression si considérable à la surface des diélectriques. Pour s'en rendre compte, il suffit de rappeler que les molécules des diélectriques sont comparables à une série de conducteurs séparés qui subissent l'action de l'influence et dès lors s'attirent les uns les autres. Un diélectrique électrisé est donc soumis à une pression dirigée du dehors au dedans.

CHAPITRE II.

Phénomènes électromagnétiques.

---

§ 1. — *Le courant.*

Le courant n'est autre chose qu'une manifestation de l'*induction électrostatique.* Nous avons vu par quel mécanisme ce phénomène nouveau détermine le transport de charges électriques en pleine matière, dans un milieu iodynamique. Nous avons vu également que la pression ou la dépression de l'éther développée par ce mouvement des ions était capable d'électriser les conducteurs à distance. Ce dernier point est d'une importance capitale; les éléments matériels ou ions n'entrant jamais, à proprement parler, en contact, on ne peut faire intervenir que la considération d'actions à distance.

Dans l'exemple considéré au chapitre précédent, la substance transmettant la charge était l'air atmosphérique rendu iodynamique ou conducteur de l'électricité par l'aigrette ou par un phénomène analogue. Le transport de l'énergie se faisait de plus en partie simple, c'est-à-dire que nous avons réalisé le transport d'une charge positive ou d'une charge négative d'un conducteur électrisé à un conducteur à l'état neutre.

Dans le courant tel qu'il se produit généralement, le phénomène se développe de la même manière, mais en partie double, c'est-à-dire que les deux conducteurs sont électrisés de signes contraires et se neutralisent mutuellement. En second lieu, l'iodynamisme du milieu est préexistant; il en est ainsi notamment des métaux, particulièrement bons conducteurs de l'électricité.

Avant l'établissement du courant, l'espace compris entre les pôles *a*, *b* sera occupé par un certain nombre d'ions positifs, par

exemple s'il s'agit d'un métal. Ces ions seront orientés suivant différentes directions (fig. 1). Mais au moment où apparaîtront les électrons polaires α, γ (fig. 2), les électrons ioniques s'orienteront dans le même sens en subissant l'action réciproque de l'influence. De plus, ces ions sont doués d'un mouvement de va-et-vient *préexistant*, que nous représenterons par des flèches de la forme $\longrightarrow$. Il en résulte une *tendance* continue à la neutralisation mutuelle des deux pôles α, γ, neutralisation qui s'effectuerait réellement si ces surfaces ne recevaient à chaque instant de nouveaux apports d'énergie d'orientation.

Nous aurons ainsi la conception du courant que nous désignerons sous le nom de *normal* et qui s'exécute en partie double suivant le sens conventionnel de la flèche $\Longrightarrow$.

En réalité, les ions ne parcourent pas librement l'espace α, γ compris entre les deux pôles, mais bien l'espace de libre parcours compris entre deux molécules iodynamiques. Chacune de ces molécules se comporte donc comme un petit corps susceptible de s'électriser par influence.

Si donc nous représentons par a, b, c (fig. 3) les espaces occupés par les molécules, par α, β, γ, δ les espaces de libres parcours, cette disposition donnera la représentation du courant.

Lorsqu'il s'agit de conducteurs métalliques, il est évidemment impossible de se rendre compte de cette constitution du courant, les espaces moléculaires échappant à toute observation par suite de leur petitesse. Mais il en est autrement pour les gaz, qui deviennent iodynamiques et, par conséquent, conducteurs de l'électricité lorsqu'ils sont dans un état de raréfaction suffisant pour rendre le chemin de libre parcours appréciable. On constate alors, ainsi que nous le verrons plus tard, la production de stries alternativement brillantes et obscures, qui correspondent respectivement aux espaces occupés par les molécules et aux espaces de libres parcours.

Il y a lieu de rappeler également cette remarque importante que ce système, d'après notre hypothèse fondamentale, sera parcouru par un courant d'éther tourbillonnant se déplaçant du pôle positif vers le pôle négatif, chaque tourbillon correspondant avec

l'axe de chaque série d'ions. Pour cette partie du mécanisme du moins, nous voyons que l'accord est parfait entre notre hypothèse et celle qui admet que le courant électrique représente un courant d'éther.

Le courant axial a donc ici une importance prédominante. Le mécanisme est comparable à ce qui se passe en grand dans l'étincelle positive, qui se produit en général seule.

§ 2. — *Force d'entraînement longitudinale d'un conducteur parcouru par un courant.*

Nous pouvons comparer un conducteur de longueur limitée, parcouru par un courant, à un tube se comportant comme une pompe aspirante et foulante, l'un des bouts correspondant à l'aspiration, le deuxième au refoulement. Ainsi que nous l'avons vu, l'ion représente ce mécanisme aspirant et foulant.

Or, un tube qui serait suspendu dans un fluide et soumis à cette action subirait une réaction qui tendrait à le déplacer en sens inverse de la direction du courant. *Un conducteur mobile parcouru par un courant tendra donc à se déplacer longitudinalement du pôle négatif vers le pôle positif.*

Afin de montrer cette conclusion par l'expérience, nous nous sommes servi d'un procédé analogue au procédé classique employé pour montrer l'action répulsive de deux éléments consécutifs de courant, phénomène qui se superpose à celui que nous examinons et dont nous verrons plus loin la raison d'être.

L'appareil se compose d'un plateau en bois muni de deux rigoles r, r' renfermant du mercure (fig. 4). Une aiguille A, montée sur un axe de rotation a et munie de deux pointes p, p', tournées dans le même sens, est traversée par un courant dont les bornes sont placées en b et en b'.

Si les actions répulsives de deux éléments consécutifs de courants étaient les seules à considérer, ces actions se produiraient avec la même intensité en p et en p', et l'aiguille A resterait immobile pendant le passage du courant. Or, l'expérience

montre que, en vertu de l'action que nous venons d'indiquer, l'aiguille se déplace dans le sens de la flèche, ainsi que le veut la théorie, comme si le pôle négatif exerçait une action répulsive plus grande que le pôle positif.

§ 3. — *Force électromotrice, intensité, résistance.*

La *tendance* continue à la neutralisation mutuelle des deux pôles a été désignée sous le nom de *force électromotrice;* elle est proportionnelle à la tension électrique des pôles.

L'*intensité* du courant représente la quantité d'énergie neutralisée pendant l'unité de temps par l'intermédiaire du conducteur.

La *résistance* du conducteur représente la faculté plus ou moins grande qu'il possède de s'opposer à la reconstitution des deux électricités.

Cela étant, la loi de Ohm s'exprime en disant que l'intensité du courant est directement proportionnelle à la force électromotrice et inversement proportionnelle à la résistance du conducteur.

Dans la théorie que nous proposons, l'intensité du courant représentera le nombre N d'ions orientés dans un cylindre de hauteur égale à l'unité ;

La force électromotrice, le nombre n d'électrons orientés par unité de surface de la section droite de ce cylindre.

Cela étant, considérons deux conducteurs de même section et respectivement de longueur l et $2l$ (fig. 5), soumis à la même force électromotrice. Le nombre total d'ions orientés sera le même. En d'autres termes, le nombre N d'ions orientés dans le cylindre de hauteur égale à l'unité sera deux fois moindre pour le conducteur de longueur double; l'intensité N du courant sera deux fois moindre.

En second lieu, le nombre d'ions orientés dans ce volume sera, toutes choses étant égales, proportionnel à la section du conducteur, ou tout au moins les choses se passeront comme s'il en était ainsi, la cause efficace étant la même.

Si nous représentons par V le nombre d'électrons orientés sur la surface S,

$$N = \frac{V}{l}.$$

Ou encore, puisque $V = nS$:

$$N = \frac{nS}{l}.$$

Ou, si nous représentons par r le terme $\frac{l}{S}$, nous aurons :

$$N = \frac{n}{r},$$

r étant désigné sous le nom de résistance.

Donc nous retrouvons :

1° La loi de Ohm d'après laquelle l'intensité N est directement proportionnelle à la force électromotrice n et en raison inverse de la résistance;

2° La résistance est directement proportionnelle à la longueur du conducteur et inversement proportionnelle à sa section.

Le travail transmis sera directement proportionnel à V et directement proportionnel à l'action que ces ions exercent les uns sur les autres, c'est-à-dire inversement proportionnel à leur distance

$$T = \frac{V}{d}.$$

Or $V = nS$ et $d = \frac{l}{n}$.

La distance d des ions est directement proportionnelle à la longueur du conducteur et inversement proportionnelle à la force électromotrice (de même qu'un ressort a sa longueur diminuée de moitié s'il est soumis à une force double).

Nous avons donc

$$T = \frac{nS \times n}{l}; \quad \text{or} \quad N = \frac{nS}{l},$$

d'où

$$T = Nn, \quad \text{ou encore} \quad n = \frac{Nl}{S},$$

d'où

$$T = N^2 \frac{l}{S} = rN^2,$$

expressions de la loi de Joule.

§ 4. — *Production des courants par contact, ou les courants thermo-électriques.*

Le moyen théoriquement le plus simple de réaliser le courant consiste à établir le contact entre deux métaux iodynamiques dont les ions possèdent à la fois d'une manière préexistante : 1° la forme qui correspond à l'élément de courant ; 2° des tensions différentes capables d'amener l'orientation ainsi que nous l'avons montré dans l'électrisation statique par contact.

Mais il ne suffit pas d'amener ici une simple orientation superficielle α, β, il faut en même temps que les ions possèdent la forme $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$ (fig. 6), qui correspond au courant.

Nous pouvons donc conclure que les conditions de l'électrisation en pleine matière qui correspondent au courant étant différentes de celles de l'électrisation superficielle, le classement des métaux se fera aussi différemment pour ces deux ordres de phénomènes.

Voici l'ordre dans lequel se classent les métaux, le plus positif occupant le dessus de la série I :

Électrisation de surface.	Électrisation en pleine matière.
I.	II.
»	Fe
Zn	Zn
Pb	Ag
Sn	Au
Fe	Cu
Cu	Sn
Ag	Pb
Au	Pt
Pt	»

Il est inutile de dire qu'il n'existe entre ces séries aucun rapport. Au contraire, la relation apparaît nettement si l'on compare la faculté que possèdent les métaux de développer un courant thermo-électrique, à leur magnétisme ou à leur diamagnétisme.

Classification des métaux par ordre de décroissance de leur faculté diamagnétique.	Nombres indiquant le rapport des forces électromotrices développées.
Bi	890
Sb	226
Zn	37
Cd	4
Pb	0
Cu	1
Ordre croissant du caractère magnétique.	
Pt	9
Fe	171

En effet, nous verrons que le magnétisme et le diamagnétisme sont dus à l'existence de courants moléculaires préexistants, qu'il suffit d'orienter les ions afin de voir apparaître la propriété magnétique ou diamagnétique.

§ 5. — *L'induction électromagnétique.*

Nous avons vu que l'induction électrostatique était le résultat de la pression ou de la dépression d'éther développée soit en avant, soit en arrière des ions en mouvement. Cette induction correspond à la transmission de l'énergie par l'intermédiaire du courant, *elle est longitudinale*, c'est-à-dire qu'elle se développe dans le sens du mouvement des ions.

L'induction électromagnétique s'observe de la manière suivante. Si un conducteur parcouru par un courant se trouve disposé parallèlement à un circuit fermé, on observe qu'il se produit dans ce dernier un courant instantané au moment de

la fermeture du premier (courant inducteur). Ce courant instantané (courant induit) se produit en sens inverse du premier. Le contraire a lieu au moment de l'ouverture du courant inducteur.

Cette induction est transversale. Afin de se rendre compte de son mécanisme, considérons un ion α (fig. 7) appartenant à un courant orienté et supposons que l'on vienne à déterminer le renversement de cette orientation α'; il se produit alors une demi-oscillation éthérée qui se communique un instant à l'ion récepteur r de l'induit, qui s'oriente en sens inverse. Dans l'exemple figure 7, les choses se passeront comme si le ressort R (fig. 8), recevant une impulsion de bas en haut, communiquait par l'intermédiaire d'un cordon une impulsion de haut en bas au sommet du ressort R'.

Donc l'induit sera de sens contraire au courant commençant.

Nous obtiendrions encore le même résultat si le courant n'était pas orienté au début, mais avec cette différence que les ions qui, par hasard, sont déjà orientés, ne prendront point part à l'action. Ce sont les ions qui se *désorientent* en sens contraire qui déterminent l'effet inverse.

Chaque renversement de courant détermine une demi-oscillation qui, comme nous le verrons, est comparable aux oscillations hertziennes. Si l'on vient à rompre un circuit parcouru par un courant, on observe à ce moment un accroissement considérable de force électromotrice à laquelle correspond l'étincelle d'induction du circuit sur lui-même. Inversement, la fermeture du circuit est toujours accompagnée d'un retard dans l'établissement du courant. Ces courants de fermeture et d'ouverture sont le résultat de l'inertie des ions. Ils se précipitent en masse à la limite du chemin de libre parcours au moment de l'ouverture et y déterminent un véritable coup de bélier d'éther. Au contraire, au moment de l'ouverture, il faut un certain temps pour que l'orientation se produise.

Si nous maintenons le sens de nos définitions, ce dernier fait est donc un phénomène d'induction électrostatique.

Il existe la même différence entre l'*induction électrostatique*

et l'*induction électromagnétique* que celle qui existe entre la propagation longitudinale et la propagation transversale de l'énergie (son, lumière). L'une est due à une pression d'éther, l'autre à un déplacement transversal.

Un conducteur parcouru par un courant étant, si l'on se place à ce point de vue, comparable à une série de petits conducteurs électrisés réciproquement par influence, nous pourrons, par une disposition semblable, reproduire le phénomène de l'induction transversale ou électromagnétique, à l'aide d'une série de conducteurs électrisés réciproquement par influence.

L'inducteur se compose d'une série de petits conducteurs (fig. 9) *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, séparés par des plaques d'ébonite; l'induit est construit d'une manière identique, les deux extrémités β, γ étant reliées par un fil métallique. Cela étant, la disposition correspondante des tourbillons est indiquée par la figure pour le courant commençant. Dans ces conditions, le fil placé à la place *f* fournira à l'électroscope une charge d'électricité positive, et une charge de nom contraire au moment où l'on supprime la charge de l'inducteur.

L'inducteur était actionné par une machine de Holtz, qui se trouvait dans l'appartement voisin, afin d'éviter toute action perturbatrice.

Le fil *f* fournira à l'électroscope une charge d'électricité positive *qui se maintiendra,* car l'induction *électrostatique* fait défaut dans ces systèmes, alors qu'elle caractérise les conducteurs. Il faut donc, afin d'observer l'induit d'ouverture de signe contraire, prendre la précaution de décharger le système induit par l'action commençante, avec une flamme par exemple. Au moment où l'inducteur se décharge, il se produit une charge *définitive* de nom contraire en *f*.

L'identité avec le courant induit ordinaire devient complète si l'on dispose de petits ponts δ en fil de verre légèrement conducteur. L'équilibre des tourbillons disparaît alors après quelques instants, et le système revient à l'état neutre après l'induction instantanée (il faut pour cela quelques instants). On constate ainsi la production des charges instantanées de noms contraires,

de l'induit d'ouverture et de fermeture, sans avoir besoin de décharger le circuit induit.

§ 6. — *Magnétisme et diamagnétisme.*

On désigne sous le nom de substance magnétique toute substance qui est attirée par l'aimant, et sous le nom de substance diamagnétique, toute substance qui est repoussée par l'aimant. Afin de nous rendre compte du phénomène, imaginons une substance iodynamique affectant la forme cylindrique, par exemple figure 10, au-dessus de laquelle nous disposerons parallèlement à la base un conducteur circulaire C parcouru par un courant. Au moment de l'établissement de celui-ci, il s'établira par induction électromagnétique dans la masse A un courant circulaire instantané de sens contraire.

Cette action instantanée ayant cessé de se produire, ces ions orientés parallèlement au circuit C reprendront leur forme naturelle. Si celle-ci correspond à un courant de sens contraire au courant C, il y aura répulsion permanente entre C et A; si ce courant est de même sens, il y aura attraction réciproque. Si, enfin, la forme naturelle des ions ne correspond pas au courant (|——|, <—>, >—<), il n'y aura ni attraction ni répulsion permanente. Mais lorsque ces courants seront capables de se produire, le parallélisme des ions de A et de C se maintiendra, grâce au tourbillon d'éther engendré par le courant inducteur et dû au déplacement de cette substance dans le sens du courant, ainsi que nous l'avons vu.

Si nous éloignons A de C, deux cas pourront se présenter : ou bien les ions de A conserveront leur orientation primitive, ou bien ils ne la conserveront pas. S'ils la conservent, nous dirons que la substance est douée de *force coercitive*, et le barreau A représentera un aimant. Telle est la propriété de l'acier trempé. S'il ne la conserve pas, l'aimantation disparaîtra.

Nous pourrons maintenant remplacer le conducteur C parcouru par un courant par l'aimant qui jouit des mêmes pro-

priétés et désigner respectivement, ainsi que nous l'avons dit, sous le nom de substances magnétiques et diamagnétiques, celles qui sont attirées et repoussées par l'aimant.

Nous voyons maintenant pourquoi les substances magnétiques et diamagnétiques sont les seules capables de développer des courants thermo-électriques.

§ 7. — *Perméabilité magnétique.*

Considérons le courant *c* (fig. 10) ou, ce qui revient au même, l'aimant A placé à une certaine distance d'un cylindre en fer F (fig. 11), le milieu interposé étant l'air ou le vide (le résultat est à peu près le même). Dans ces conditions, les actions dont nous venons de parler se transmettront à travers ce milieu et par l'intermédiaire de l'éther interposé. Supposons maintenant qu'au cylindre idéal *c* d'éther, on vienne à substituer un cylindre d'une substance qui n'est ni magnétique ni diamagnétique. Les éléments subiront de proche en proche, de tranche en tranche, la première action d'induction dont nous avons parlé au moment de l'application de l'aimant A et se communiqueront à F, qui conservera sa propriété d'aimant, c'est-à-dire sera attiré par A pendant tout le temps de son application. La perméabilité magnétique aura pour mesure l'énergie d'orientation qui aura ainsi été transmise.

Si la substance *c* est diamagnétique, les choses se passeront à peu près de la même manière pour ce qui concerne la première phase d'induction ; quant à la phase permanente d'attraction, nous remarquerons que les actions attractives de A pour F seront en partie ou en tout équilibrées par les actions répulsives de *c* par A et de *c* par F.

La perméabilité magnétique serait donc nulle pour une substance dont le diamagnétisme serait égal au magnétisme du fer. Ce cas ne se présente pas dans la nature, mais l'expérience montre que les corps diamagnétiques sont moins perméables que le vide.

Le dernier cas est celui où la substance *c* est elle-même magnétique. Dans ces conditions, il y aura simplement transmission du phénomène d'orientation comme si A et F étaient en contact, ou dans une proportion moindre si *c* est moins magnétique que F. L'expérience démontre que le fer transmet l'action magnétique avec une intensité environ trois cents fois plus grande que le vide.

Ces considérations amènent à une conséquence assez étrange. Toutes choses étant égales dans le phénomène de la transmission de l'action magnétique, la première phase d'induction intervient seule. Si, par l'intermédiaire de *c*, nous avons orienté deux fois plus d'ions en F, l'action attractive qui se manifeste ensuite d'une manière permanente est doublée. Cette action permanente paraît indépendante du milieu interposé.

C'est ainsi que tous les corps qui ne sont ni magnétiques ni diamagnétiques possèdent sensiblement la même perméabilité, qui est celle du vide.

L'attraction électromagnétique se transmet donc au travers de la matière comme si elle n'existait pas. Elle posséderait cette propriété en commun avec l'attraction newtonienne.

§ 8. — *Origine des attractions et des répulsions électromagnétiques.*

Nous avons vu dans le chapitre I[er] quelle était l'origine des actions électrostatiques à distance ; les actions électromagnétiques en sont la conséquence.

Si l'on considère la série ionique *ab* (fig. 12) constituant le courant, il résulte de ce que nous avons dit que celle-ci est parcourue par un courant axial *et tourbillonnant* d'éther se dirigeant du pôle positif vers le pôle négatif, quel que soit du reste le sens du mouvement des ions.

Imaginons maintenant un courant circulaire réalisé artificiellement ou de l'ordre de ceux que nous avons considérés dans les aimants.

Un pareil système produira un mouvement circulaire ou tourbillonnant d'éther, dirigé du pôle positif vers le pôle négatif, *et dont chaque spire constitue elle-même un tourbillon* (le tourbillon électrostatique); en un mot, nous réaliserons ce que nous appellerons un *tourbillon de deuxième ordre.*

C'est ici que viennent se placer les admirables expériences de M. Weyher, qui a réussi à réaliser, à l'aide de simples tourniquets munis de palettes, toutes les particularités des actions attractives ou répulsives que présentent les aimants ou les solénoïdes.

Si l'on vient à placer deux tourniquets C, D (fig. 13) parallèlement l'un à l'autre et si on les fait tourner en sens contraires de manière à rendre les spires α, β des tourbillons parallèles, on constate que les extrémités A, B et A′, B′, qui figurent les pôles de noms contraires, s'attirent; qu'il y a répulsion si les spires α, β se déplacent en sens contraires.

M. Weyher a non seulement pu reconnaître cette analogie dans ce cas particulier, mais encore une parfaite concordance lorsque les tourniquets sont placés sur le prolongement l'un de l'autre et lorsque leurs directions sont perpendiculaires, et dans ce dernier cas apparaît l'existence de la région neutre. Seulement, dans l'attraction électromagnétique, chaque spire α est constituée elle-même par un tourbillon.

Nous voyons maintenant par cette expérience que deux courants parallèles et de même sens s'attirent; le contraire a lieu lorsqu'ils sont de sens contraires.

Ce tourbillon d'éther devient remarquablement apparent lorsque l'on place un tube parcouru par un rayon cathodique dans l'axe d'un électro-aimant. M. Broca a montré que ce rayon s'enroule en spirale *et dans le sens que nous avons indiqué,* comme le ferait la fumée soumise à un tourbillon aérien.

M. Zenger, ayant suspendu une sphère en cuivre à un fil métallique de manière à faire coïncider l'axe d'un électro-aimant avec son prolongement, a remarqué d'abord ce fait connu que si l'on vient à tordre le fil de manière à imprimer un mouvement de rotation rapide à la sphère, ce mouvement est enrayé du moment où l'électro-aimant est mis en activité. Mais si la sphère

est déplacée latéralement, on la voit décrire autour de l'axe de l'aimant une série de spires concentriques qui témoignent de l'existence du tourbillon.

§ 9. — *Perméabilité électrostatique et électromagnétique.*

D'après ce que nous avons vu, la perméabilité magnétique est telle (si l'on fait abstraction des actions retardatrices ou diamagnétiques) que les choses se passent comme si la matière n'existait pas; le tourbillon d'éther (1er ordre), comparable à un filament très délié, tordu, s'enroule et tourbillonne (2e ordre) dans les milieux matériels sans rencontrer de résistance sensible. La vitesse de déplacement des spires tourbillonnantes est donc la même que si la matière n'existait pas.

Notre filament tordu, spire du tourbillon électromagnétique, ne représente autre chose que l'axe d'une série ionique de courants, c'est-à-dire le tourbillon électrostatique de premier ordre. En pleine matière à son développement correspond le courant. Or, celui-ci se propage, comme on le sait, avec la vitesse de la lumière dans tous les conducteurs si l'on fait abstraction de la diffusion du courant (expérience de Blondelot). Nous pourrons donc dire que la *perméabilité électrostatique* est la même pour tous les corps. Cette vitesse de propagation est du reste très vraisemblablement celle de l'influence dans le vide.

Nous conclurons donc à l'absence de résistance à la propagation d'un tourbillon élémentaire dans les milieux matériels.

Ici se pose une question importante. Nous avons vu dans le chapitre de l'électrostatique que les substances non conductrices étaient transparentes pour l'influence, alors que les métaux se montrent parfaitement opaques; il semble donc exister une contradiction flagrante entre ce que nous avons dit précédemment et notre assertion actuelle.

Afin de résoudre la difficulté, il suffit d'observer l'étincelle et les figures de Lichtenberg. Nous voyons que le tourbillon électrostatique n'est pas simplement un tourbillon ionique, mais bien

un tourbillon appartenant à l'ordre des dimensions tangibles. En réalité, un certain nombre de tourbillons ioniques se sont groupés pour former un tourbillon d'ensemble. Il en résulte que la vitesse d'entraînement V, tangentielle à la surface, ne permettra le raccordement des ions que sur une épaisseur relativement très faible à l'intérieur d'un conducteur où ils ne peuvent se déplacer latéralement.

C'est vraisemblablement la raison pour laquelle l'électricité statique se maintient à la surface des conducteurs. Mais si ce mouvement tourbillonnant n'existe pas, les conducteurs transmettent l'orientation au sein de leur masse, ainsi que cela se passe pour le courant.

§ 10. — *Production des courants par induction.*

D'après ce que nous avons vu, si l'on vient à approcher ou à éloigner un courant ou un aimant d'un circuit fermé, ou encore si l'on développe ou si l'on supprime un courant dans le voisinage de ce circuit, il se développe des courants d'induction.

Il n'y a donc pas lieu d'y revenir, mais il sera utile d'indiquer des cas spéciaux d'induction.

Si nous considérons un disque métallique, par exemple un disque en cuivre C (fig. 14), tournant dans le voisinage du pôle d'un aimant A, il se développe, par suite du rapprochement et de l'éloignement de l'aimant des éléments du disque, des courants d'induction parasites, découverts par Faraday. Matteuci a étudié d'une manière toute spéciale les chemins parcourus par ceux-ci dans l'épaisseur du disque. Les chemins parcourus par ces courants sont figurés par des courbes assez compliquées. Mais il est possible de dériver une partie de ceux-ci en appliquant légèrement un ressort r sur la périphérie du disque. Un fil conducteur fixé à celui-ci et à l'axe de rotation est alors parcouru par un courant. Telle est même la première machine magnéto-électrique imaginée par Faraday.

Au lieu d'utiliser l'aimant A, on peut utiliser l'aimant terrestre;

en orientant convenablement le disque, on obtient ainsi des courants appréciables.

Si nous remarquons qu'en vertu de la loi de Lenz, le disque tend constamment à se déplacer en sens inverse du mouvement qu'on lui communique, le disque devra éprouver une résistance dans son mouvement de rotation. De même, si l'on fait osciller une aiguille aimantée au-dessus d'un disque en cuivre, ces oscillations ne tardent pas à être amorties.

Ces phénomènes d'induction sont donc dus en résumé à l'existence des ions orientés de l'aimant. Afin d'obtenir cette orientation ionique, on peut se servir de moyens mécaniques; c'est ainsi que si l'on vient à tourner un barreau d'acier trempé, le frottement de l'outil se produisant toujours dans le même sens, il y a aimantation.

§ 11. — *Induction monométallique.*

Nous avons remarqué que cette orientation due au frottement se produit non seulement pour l'acier, mais pour tous les métaux pendant un temps très court, mais suffisant pour déterminer des courants d'induction.

Voyons ce qui va se passer si l'on appuie à l'aide d'un ressort une pièce métallique contre la tranche d'un disque tournant rapidement et formé du même métal (fig. 15).

Au moment où le contact aura lieu, les ions α, d'abord orientés suivant une direction quelconque, s'orienteront suivant une direction unique, par exemple le sens α' pour le disque.

Mais lorsque les ions α' quitteront le frottoir, ils conserveront un instant leur orientation, d'où il résulte que le courant représenté par les ions α'', en s'écartant du conducteur représenté par le frottoir, y déterminera un courant induit, dont le sens sera indépendant du sens de la rotation du disque. Dans l'exemple que nous donnons, le frottoir représenterait le pôle négatif.

Remarquons que les métaux à ions dissymétriques, c'est-à-

dire les métaux magnétiques et diamagnétiques, seront seuls capables de fournir un courant.

Si, au lieu de considérer un métal quelconque, nous considérons un aimant, les ions sont *orientés*, les ions α seront remplacés par les ions β; de plus, l'effet sera doublé, car l'approche des électrons positifs de β déterminera sur l'induit la même action que l'éloignement des électrons négatifs de α''. Il en résultera un courant tel que le frottoir correspondra au pôle négatif, lorsque le sens de la rotation est celui que nous indiquons. Le frottoir correspondra évidemment au pôle positif si la rotation s'exécute en sens contraire.

Donc, *lorsque la rotation s'exécute dans le sens du courant aimant, le frottoir correspondra au pôle négatif.*

Remarquons maintenant que pendant la rotation du disque, le frottoir s'échauffe plus ou moins et que, dès lors, au phénomène d'induction viendra se superposer le courant résultant de la différence de température entre le frottoir et le disque, dit « effet Thomson ».

Mais il est aisé de distinguer ces deux courants par cela qu'ils ont souvent des sens différents.

Le résultat le plus intéressant est celui qui est fourni par la fonte de fer grise. La surface frottante du frottoir F était préalablement polie à l'aide d'une pierre à l'émeri montée sur l'axe d'un tour. Le polissage était effectué, par exemple, suivant une direction *ab*; cela étant, si l'on fait coïncider la direction du polissage avec celle de la circonférence du disque, on constate un courant de sens déterminé; si ensuite on vient à disposer la direction du polissage perpendiculairement à la direction du mouvement de rotation du disque, on remarque généralement que le courant produit est de sens contraire.

L'effet Thomson est toujours de même sens et faible relativement à l'intensité du courant que nous examinons; le premier persiste, de plus, quelques instants lorsque la rotation du disque a cessé, si celui-ci s'est échauffé.

L'antimoine présente la même particularité, mais plus faiblement, ainsi que le bismuth. Le zinc nous a toujours fourni

des courants de même sens, mais de sens contraire à l'effet Thomson.

Le disque en fonte grise muni du frottoir en zinc nous a fourni encore ce curieux phénomène du renversement du courant. Ce frottoir, après avoir été soumis au frottement du disque en fonte pendant un certain temps, a fourni un courant de sens déterminé, toujours le même ; mais si on lui fait subir une rotation de 90°, le courant change de sens. Il est, du reste, à remarquer que l'aiguille du galvanomètre revient instantanément au zéro lorsque la rotation cesse. Si la rotation a duré pendant un certain temps, il persiste un léger courant résiduel toujours de même sens, dû à l'effet thermo-électrique résultant de l'échauffement du frottoir.

Nous nous trouverions donc ici en présence de l'*analogue électromagnétique* de l'électrisation électrostatique de la machine de Ramsden.

Nous retrouvons ici la nécessité, pour produire ces courants, d'utiliser des métaux magnétiques ou diamagnétiques. Ces derniers se classent dans le même ordre que celui que nous venons d'indiquer pour l'action thermo-électrique. Dans l'ordre décroissant d'effets, on trouve : Bi, Sb, Zn, Cu ; ensuite la fonte de fer, qui fournit un courant relativement très intense.

Le bronze composé de 86 parties de cuivre et de 14 parties d'étain ne produit aucun courant. L'aluminium développe un courant extrêmement faible.

Ces expériences ont été réalisées à l'aide de l'appareil que nous reproduisons photogramme I.

Nous venons de voir que la théorie montre que *lorsque la rotation s'exécute dans le sens du courant aimant, le frottoir correspond au pôle négatif.* Nous avons tenu à vérifier ce fait important à l'aide d'un courant quelconque. A cet effet, nous avons fait construire une bobine en bois ayant 19 centimètres de diamètre sur 30 centimètres de longueur, munie d'un axe en bronze afin d'éviter toute action émanant d'un aimant. Le fil de cuivre servant de conducteur avait 4 millimètres de diamètre ; le nombre de tours de fil était de soixante. La bobine était enve-

loppée d'un cylindre en laiton de diamètre d (fig. 15bis) et d'un cylindre en laiton de diamètre plus grand d'. Pendant la rotation, un ressort en laiton appuyait légèrement sur le cylindre d, un autre ressort sur le cylindre d'. Tous deux étaient reliés aux bornes d'un galvanomètre sensible à aiguilles astatiques. Remarquons que par cette disposition le ressort appliqué en d subissait l'induction, alors que le ressort appliqué sur le cylindre d' ne la subissait que faiblement, par suite de l'éloignement de la bobine, et ne servait qu'à fermer le courant.

Cela étant, la bobine étant parcourue par un courant de 18 ampères et animée d'un mouvement de rotation rapide, nous a permis de constater :

1° Que le sens du courant dépendait du sens de la rotation de la bobine;

2° Que le ressort appliqué en d jouait le rôle de pôle négatif lorsque la rotation de la bobine s'exécutait dans le sens du courant, et jouait au contraire le rôle de pôle positif lorsque la rotation s'exécutait en sens opposé.

Le photogramme II représente l'appareil dans son ensemble.

Nous obtiendrions évidemment le même résultat avec un cylindre de diamètre d sur toute la longueur de la bobine, mais en faisant en sorte que les spires soient plus relâchées dans l'espace correspondant à d' que dans l'espace correspondant à d. Ceci nous fournit le moyen de déterminer la *densité du courant* pour les différentes tranches d'un aimant.

Si l'on substitue l'aimant à la bobine, on obtient le phénomène désigné sous le nom d'*induction unipolaire*. Nous voyons que ce phénomène peu expliqué jusqu'à présent est la conséquence nécessaire de ce que nous venons de dire.

§ 12. — *Courants de convexion.*

Nous désignerons sous le nom de courants de convexion ceux qui sont développés à l'aide de charges statiques répandues à la surface de conducteurs et pour lesquels les mouvements des

ions des substances iodynamiques sont remplacés par des mouvements réalisés artificiellement.

Lorsque nous nous sommes occupé dans le chapitre I[er] des machines à plateaux tournants telles que la machine de Whimshurst, nous avons examiné implicitement des courants de cette espèce.

Lorsque les ions α se rapprochent du conducteur positif et de même lorsque les ions β se rapprochent du conducteur négatif, il se développe des courants de convexion *contre-électromoteurs* qui tendent à charger ces conducteurs.

Un galvanomètre à aiguilles astatiques, placé à plusieurs mètres d'une machine de Holtz, nous a montré qu'au moment de la charge, c'est-à-dire au moment où l'on tire le déflagrateur, il se produit une déviation instantanée de l'aiguille; de même au moment de la décharge, il se produit une déviation en sens contraire.

Les actions observées par Rowland lorsque l'on déplace rapidement une charge électrostatique et qui, sous certains rapports du moins, fournissent des effets identiques à ceux du courant lui-même, paraissent devoir s'interpréter de la même manière.

Voici la façon la plus simple de concevoir l'action du courant de convexion de Rowland sur l'aiguille aimantée ou, ce qui revient au même, sur un autre courant.

Considérons une surface S (fig. 16) électrisée positivement, par exemple, se déplaçant dans le sens de la flèche, ainsi qu'un conducteur c parcouru par un courant, également dans le sens de la flèche. Rappelons également ces lois de l'induction électrostatique que lorsque l'électron positif α s'approche de l'électron négatif α', il y a attraction, et que de même lorsque l'électron positif β s'écarte de l'électron positif β', il y a également attraction. Nous voyons donc qu'à ce point de vue, le transport de l'électricité positive dans une direction déterminée développe un effet comparable à celui que produirait un courant de même sens. L'inverse aurait lieu si le conducteur S possédait une charge de signe contraire.

Mais on peut se demander si ce courant de convexion est, à tous les points de vue, comparable au courant normal.

§ 13. — *Les oscillations électriques.*

Nous avons vu dans le chapitre précédent quelle était la cause de l'induction. Lorsqu'un électron se déforme de manière à passer du signe + au signe — (fig. 17), il se développe une demi-oscillation de l'éther ambiant qui détermine à distance l'orientation inverse, un courant de sens contraire à celui qui correspond à la déformation inductrice. Si l'inducteur revient à sa première forme, nous obtiendrons l'oscillation transversale entière et un deuxième courant induit de sens contraire.

Tel est le mécanisme de la production des oscillations découvertes par Hertz et prévues par Maxwell.

Cela étant, en se déformant de β en γ, l'électron E (fig. 18) développera dans l'éther le quart d'onde transversale *ab*; en se déformant de γ en β, il déterminera le quart d'onde *ba'*; la déformation suivante déterminera le quart d'onde *a'c*, et ainsi de suite.

En résumé, nous réaliserons dans l'éther des oscillations transversales, lesquelles, si elles viennent à rencontrer à distance un conducteur, provoqueront des orientations électroniques correspondantes, c'est-à-dire l'oscillation électrique. Le deuxième conducteur vibrera à l'unisson du premier, de même que cela se passe entre deux diapasons.

Si l'on représente par λ la longueur d'onde, par V la vitesse de propagation, par t le temps d'une oscillation, on a

$$\lambda = Vt.$$

Si nous admettons que ce mécanisme est celui de la propagation de la lumière V = 300 000 kilomètres, il faudra donc, pour obtenir des longueurs d'ondes ayant des dimensions relativement petites, réaliser des oscillations extrêmement rapides. Telle est la difficulté qui a été vaincue par Hertz.

Feddersen avait déjà remarqué que si l'on détermine la décharge d'une bouteille de Leyde, celle-ci subit une série

d'oscillations. On pouvait s'en rendre compte par cela qu'au moment de la décharge le pôle positif est toujours plus brillant. En observant dès lors la décharge au miroir tournant, on constatait que les deux pôles de l'excitateur devenaient alternativement brillants et obscurs. Une seule étincelle apparente est donc en réalité composée d'une série d'étincelles de sens contraires. Au moment de la décharge, les électrons α et β (fig. 19) sont soumis à un choc qui les oblige à osciller un certain nombre de fois du positif au négatif, ainsi que cela se passerait pour un pendule.

L'appareil de Hertz se compose d'une bobine d'induction B (fig. 20); chacun des pôles est mis en communication avec des sphères conductrices, de manière à réaliser une certaine capacité. L'étincelle alternante jaillissait en *a* et *a'*. Ce système a été désigné sous le nom d'*excitateur*.

L'appareil destiné à reconnaître l'existence des oscillations éthérées a été désigné sous le nom de *résonateur*.

Le résonateur de Hertz se compose d'un anneau conducteur C (fig. 21), interrompu en *s* par un espace très petit. Cela étant, disposons *cd* en face de l'excitateur *aa'*, de manière qu'un plan passant par les conducteurs de l'excitateur renferme le plan de l'anneau C, la section *s* étant dans la position indiquée. La portion *csd* sera dès lors le siège d'oscillations électroniques alternantes, et des étincelles jailliront en *s*.

Si nous plaçons en face de l'excitateur *aa'* un écran métallique P (fig. 22), celui-ci réfléchira les ondes éthérées sur elles-mêmes, ainsi que cela se passe lorsque des vagues liquides viennent à rencontrer un mur vertical, et il en résultera la production d'ondes appelées stationnaires, telles que les points α, β, γ, désignés sous le nom de nœuds, seront toujours à l'état de repos. Si le résonateur est placé en ces points, il ne se manifestera pas d'étincelle. On peut donc ainsi déterminer la longueur de la demi-onde $\frac{\lambda}{2}$.

On peut reproduire, à l'aide de ces ondes, les expériences fondamentales de l'optique relatives à la réflexion, à la réfraction, à la polarisation, aux interférences.

Le phénomène de la réfraction a pu être démontré à l'aide de grands prismes en asphalte. Les expériences de Bose, qui a réussi à réaliser des ondes très petites, permettent maintenant de réduire toutes ces dimensions. La diffraction, comme on le sait, est d'autant plus accentuée que la longueur d'onde est plus grande. Bose s'en est servi pour la mesure des longueurs d'ondes électriques.

Le phénomène des interférences a été réalisé par Righi; on peut utiliser soit la méthode des miroirs, soit la méthode du biprisme.

Quant à la polarisation, elle est réalisée tout naturellement dans la production de l'onde.

Qu'il nous suffise ici de signaler ces faits qui établissent l'analogie entre l'onde électrique et l'onde lumineuse. Le lecteur pourra compléter ses connaissances par la lecture d'ouvrages spéciaux.

On a utilisé, afin de reconnaître la présence d'ondes électriques, un procédé beaucoup plus sensible que celui du résonateur de Hertz. Il est basé sur ce fait que si deux fragments d'un même métal sont mis en contact, ce contact présente une grande résistance pour certains métaux, tels que le nickel, par exemple; le cuivre ne manifeste pas cette propriété. La cause de cette résistance au contact se trouve évidemment dans cette circonstance que deux électrons α, β (fig. 23) n'exercent pas l'un sur l'autre une action suffisante pour déterminer leur orientation mutuelle α', β'.

Pour obtenir ce résultat, il suffira de soumettre ces électrons à une force capable de les infléchir simultanément dans le même sens $\alpha'\beta'$. C'est ce qui est réalisé par l'onde hertzienne, qui se comporte vis-à-vis de tous ces électrons à peu près comme un archet qui les infléchirait dans une direction unique.

Si donc nous introduisons dans le circuit d'une pile P (fig. 24) un galvanomètre G et un tube T renfermant de la limaille de nickel, le courant ne passe pas. Mais si l'oscillation hertzienne vient à rencontrer le tube T, l'orientation dont nous avons parlé se produit et le courant passe. Lorsque le courant a cessé de

passer, il suffit de communiquer un léger choc au tube à limaille pour rétablir la résistance primitive.

Tel est le principe de la télégraphie à distance réalisé par Marconi en accroissant la sensibilité du tube et en mettant celui-ci en contact avec de longues tiges métalliques, destinées à être impressionnées par l'oscillation parcourant l'espace, et qu'il désigne sous le nom d'*antennes*.

Bose a réussi à réaliser des ondes électriques n'ayant que quelques millimètres de longueur, alors qu'on sait que l'oscillation lumineuse appartient à l'ordre de $\frac{1}{40\,000}$ de millimètre.

Oscillations électriques développées dans des fils conducteurs. — Je me souviens d'avoir rencontré au cours de mes lectures cette phrase remarquable dont je n'ai pu retrouver l'auteur : « Que dirait-on d'un observateur qui, voyant se mouvoir avec la même vitesse un cheval et une locomotive, dirait que ces deux êtres sont de même nature, pour le seul motif que leurs vitesses sont les mêmes? » Nous avons vu, en effet, que l'électricité se propageait à la surface des conducteurs avec la vitesse de la lumière, alors que, dans ces conditions, le phénomène lumineux et le phénomène électrique n'ont entre eux que des rapports fort lointains.

Considérons un excitateur de Hertz (fig. 25), dans lequel les sphères ont été remplacées par des plaques conductrices, et plaçons parallèlement à celles-ci deux autres plaques conductrices munies de fils parallèles tendus.

Supposons d'abord que le plateau p reçoive une impulsion électrique orientant les ions normalement à sa surface; si l'orientation est positive en p, elle sera négative en p'. Celle-ci se propagera par induction électrostatique ou par influence aux plateaux p_1, p_1', de telle manière que pendant le temps de cette impulsion, la propagation se sera développée sur une longueur ab et cela avec la vitesse de la lumière.

Lors de l'impulsion suivante en sens contraire, nous obtiendrons l'orientation abc, qui correspondra à une longueur d'onde et ainsi de suite. En réalité, le passage du négatif au positif se produit par gradations insensibles, de telle manière que b correspondra à un nœud d'oscillations.

Afin de reconnaitre l'existence de ces oscillations, on se sert encore du résonateur de Hertz, disposé soit dans la position c de manière à obtenir l'étincelle par la production des courants induits α, β, ou même dans la position verticale c', de manière à obtenir l'étincelle par la production de l'induit p de l'un des fils.

Les fils f et f' étant de longueur limitée, on réalisera par ce procédé des ondes stationnaires, ainsi que par les oscillations de l'éther.

Nous désignerons ce système orienté sous la dénomination de système Γ.

A ce premier système orienté peut s'en superposer un autre, que nous désignerons sous le nom de système Δ (fig. 26); en effet, l'induction développée par les plateaux p, p' pourra avoir pour résultat de déterminer l'orientation que nous avons examinée dans le premier chapitre, c'est-à-dire l'orientation normale au conducteur. Si nous plaçons alors le résonateur verticalement dans la position C_1, celui-ci ne pourra guère subir l'induction du système Γ, mais il subira l'induction électrostatique, ainsi que la figure l'indique, de manière à produire une étincelle à la coupure.

On doit la découverte de ces deux systèmes d'oscillations aux belles recherches de Turpain. Il a reconnu que les nœuds du premier système correspondent avec les ventres du second. Il a également observé ce fait du plus haut intérêt, que la longueur d'onde et par conséquent la vitesse de propagation du système Γ n'était pas influencée par le diélectrique dans lequel les fils plongent. Au contraire, la vitesse de propagation du système Δ varie dans le même rapport que la vitesse de la lumière. Enfin, dans le vide et pratiquement dans l'air, la vitesse de propagation est la même pour les deux systèmes.

Au lieu de déterminer la longueur d'onde en déplaçant le résonateur C, on peut utiliser la méthode du *pont*. Supposons le résonateur en activité en C, et supposons encore que l'on vienne à placer un conducteur transversal en bb' (fig. 25), c'est-à-dire à un nœud, la tension électrique étant nulle de part et d'autre, il est évident que le résonateur continuera à produire des étincelles. Il en serait autrement pour toute autre position.

Nous pouvons pousser plus loin encore les conséquences de notre image. Voyons d'abord pourquoi les nœuds du système Δ correspondent aux neutres du système Γ. Au moment où l'excitateur E (fig. 27) reçoit une charge, par exemple positive, l'orientation se développera sur la longueur $\frac{\lambda}{2}$ correspondant au temps de la charge; cette orientation correspond au système Γ; elle fournit la représentation du courant. Un instant après, nous obtiendrons l'orientation a'.

Mais *entre les deux phases* correspondant à la production de ces deux demi-longueurs d'onde il a dû nécessairement s'en produire une troisième, car, en passant du plus au moins, l'étincelle a jailli; il s'est donc produit un courant dirigé suivant la flèche *f*, c'est-à-dire par induction vers la disposition *b*. Or cette action a atteint précisément son maximum d'intensité au moment où la première s'annule. Donc les nœuds du système Δ correspondront aux ventres du système Γ.

Examinons maintenant d'une manière toute spéciale le système Δ, car il va nous fournir des renseignements précieux sur la constitution de l'éther. Ce système dynamique se comporte au point de vue de la réfraction absolument comme la lumière; nous pourrons donc sans trop nous hasarder conclure ici à l'identité.

Or les fils *f*, *f'* (fig. 28) étant placés parallèlement, nous voyons que les ions α, β sont reliés par des tourbillons d'éther de premier ordre. (S'il n'y avait qu'un fil, le tourbillon serait encore normal et les choses se passeraient du reste de la même manière.) Les choses se passent comme si les fils étaient réunis par une infinité de filaments élastiques soumis alternativement à des efforts de traction dans deux sens opposés.

Comme un semblable système ondulatoire est lui-même susceptible de se propager dans le vide, on doit admettre que l'éther est également constitué par une infinité de filaments tourbillonnants élastiques de longueur indéfinie, possédant toutes les orientations possibles, capables de transmettre toutes les actions à distance.

Nous voilà ainsi amené par une méthode bien différente à la

conception d'un éther *gyrostatique* ou *adynamique* analogue à celui de W. Thomson, lequel en pénétrant la matière nous donne immédiatement l'image de l'*atome-tourbillon* de Helmholtz : ce que ce physicien appelle *ligne-tourbillon* n'est autre chose que l'axe d'une *chaîne ionique* correspondant au courant, lequel axe est occupé par notre filament tourbillonnant de l'éther gyrostatique. Lorsque les ions accélèrent leurs mouvements de rotation, ils s'écartent; ce qui se traduit par un allongement du conducteur dans le sens du courant. En effet, si la tension électrique s'accroît, c'est-à-dire si le rayon de l'électron diminue, l'invariabilité de l'énergie du mouvement de celui-ci exige un accroissement de vitesse angulaire. Nous retrouvons ainsi l'image du *tube-tourbillon* de Helmholtz, dont la section est inversement proportionnelle à la vitesse instantanée de rotation, ou encore, d'après notre conception, inversement proportionnelle au potentiel électrique.

Si enfin le *tube-tourbillon* ou notre *chaîne ionique* se ferme comme un anneau, nous retrouvons la conception des *atomes-vertex* de W. Thomson, qui correspondent à des courants fermés.

Nous nous occuperons des propriétés remarquables des chaînes ouvertes et fermées dans le chapitre suivant.

Si nous considérons les ions placés à la limite des fils dans le système Δ (fig. 29), nous voyons que le mouvement oscillatoire peut se transmettre aux fibres normales *f* de l'éther libre; celles-ci seront sollicitées par des tractions qui s'exécuteront alternativement et longitudinalement dans deux sens opposés, de manière à nous donner l'image de la propagation transversale de la lumière.

Ce mécanisme est, du reste, identique, mais singulièrement renforcé lors de la production de l'étincelle.

Supposons qu'au lieu du vide supposé entre les fils *f*, *f'* (fig. 28) on vienne à interposer un diélectrique. Dans ces conditions, l'énergie mise en jeu ne sera pas seulement employée à déterminer l'oscillation des électrons α, β et de l'éther du vide, mais encore à déterminer l'oscillation des électrons du diélec-

trique interposé. En un mot, il y a accroissement de la masse d'éther mise en mouvement, d'où diminution de vitesse de propagation. Nous reviendrons plus tard sur cette particularité qui correspond à une relation remarquable de Maxwell.

Le mode de propagation Δ correspond en réalité au mode de propagation dans le vide. Comme on le voit, il a une tendance à suivre les conducteurs, ce qui rend possible la propagation de l'onde à la surface de notre globe. Il serait intéressant de rechercher si des rayons lumineux très rasants n'ont pas une tendance à suivre des surfaces conductrices.

Nous pourrons encore obtenir le même résultat à l'aide d'un fil présentant l'oscillation Γ. Dans ces conditions, l'ion vibrant α (fig. 30) pourra encore transmettre normalement au fil des oscillations de même espèce. Nous verrons plus loin comment on peut montrer l'existence de ces oscillations.

Reprenons maintenant le système Δ et remarquons que la polarité positive correspond à un accroissement de pression de l'éther, l'orientation négative à une dépression; chaque ion étant symétrique, il produira dans un sens une compression de l'éther, mais qui compensera exactement la dépression produite en sens contraire. Une série d'ions α, α' (fig. 31) de signes alternants, ou, ce qui reviendrait au même dans ce cas-ci, simplement en mouvement dans un sens déterminé, produira les condensations et les dépressions *c*, *d* qui fourniront l'image de la propagation du son.

Si le courant est ouvert, ce système ondulatoire longitudinal pourra se propager dans l'espace; si le courant est fermé, il restera localisé dans le circuit lui-même. Nous verrons plus loin tout le parti que l'on peut tirer de cette considération.

Oscillations électriques développées à la surface des conducteurs. — Nous avons vu que l'électrisation par frottement était accompagnée d'une vibration de l'électron positif ou négatif. Nous avons également vu que c'étaient ces vibrations qui provoquaient la projection des ions. Nous pouvons ajouter maintenant que ces vibrations développent également dans l'éther des vibrations harmoniques positives ou négatives capables de provoquer la luminescence de tubes renfermant de l'air raréfié.

Il est facile de montrer que cette luminescence n'est pas le résultat de l'induction électrostatique due au mouvement de déplacement des ions. En effet, il suffit de placer une lame diélectrique *d* (fig. 32) en contact avec le conducteur *c* pour empêcher cette action inductrice, ainsi que nous l'avons dit, alors que la luminescence du tube se produit indifféremment, que la lame diélectrique soit mise en usage ou non.

On remarque encore que certaines parties de l'espace correspondant à des ventres sont plus aptes à provoquer la luminescence que d'autres qui correspondent à des nœuds.

Ces harmoniques se produisent avec une grande intensité si l'on relie l'un des pôles d'une bobine d'induction activée par un interrupteur de Whénelt avec une toile métallique à grosses mailles.

Un tube à air raréfié s'illumine fortement dans son voisinage, et si l'on examine celui-ci au miroir tournant, on remarque que chaque charge positive donne lieu à une série d'oscillations harmoniques et qu'il en est de même de chaque charge négative communiquée au système. On constate également que le phénomène est accru si les fils possèdent des diamètres suffisants pour éviter la production d'aigrettes.

Enfin, l'illumination du tube se produit sur toute sa longueur et avec la plus grande intensité, lorsqu'il est disposé parallèlement au conducteur, ce qui indique bien que nous avons affaire à l'induction produite par le système Γ dont nous avons parlé plus haut.

CHAPITRE III.

La radioactivité et l'infra-électricité.

---

§ 1. — *Définition de la radioactivité.*

Nous désignerons sous le nom de radioactivité la faculté que possède, dans certains cas, la matière de décharger à distance les corps électrisés. En adoptant cette définition, nous dévions quelque peu le mot de son sens primitif, lequel implique l'idée d'une radiation qui intervient dans beaucoup de ces phénomènes, mais pas nécessairement.

La base du phénomène radioactif se trouve dans le fait fondamental de l'induction électrostatique qui détermine le courant. Nous avons vu que si le conducteur d'une machine à frottement, par exemple, est électrisé, il se produit pendant la marche de la machine des pulsations ioniques qui ont pour résultat de projeter les ions dans le milieu ambiant et de déterminer l'induction électrostatique (fig. 1). Mais cette action étant terminée, ces ions se répandront dans ce milieu ambiant sans posséder aucune orientation, de telle manière qu'au delà d'une certaine distance, un conducteur ne recevra plus de charge électrique appréciable. Mais ces ions désorientés ne tarderont pas à manifester leur présence par l'action d'influence qui les sollicite, si l'on communique une charge à ce conducteur. En effet, ceux-ci subissent sous l'action du conducteur chargé une nouvelle orientation due à l'influence. Il se produira autour de celui-ci une série de courants ouverts qui ne tarderont pas à amener la décharge (fig. 2). La vitesse de décharge sera la même pour les deux électricités si la tension initiale de l'électron négatif est égale à la tension initiale de l'électron positif, et il en sera autrement si ces tensions sont inégales.

§ 2. — *Influence du raccordement du champ sur la vitesse de décharge.*

Nous voyons donc la raison pour laquelle un conducteur se décharge lorsqu'il est placé à une certaine distance d'une aigrette électrique. Le conducteur que nous avons considéré détermine, ainsi que nous le supposons implicitement, un *champ non raccordé.* Il en sera tout autrement si nous considérons un *champ raccordé.* Dans ces conditions, le tourbillon éthéré *ab* (fig. 3) qui relie l'électron positif à l'électron négatif se comporte comme un milieu impénétrable pour les ions de l'espace environnant, et dès lors l'établissement d'un courant capable de dissiper l'énergie devient impossible. Il est évident que cette action préservatrice sera d'autant plus énergique que la ligne de force sera de plus faible longueur.

Afin de réaliser l'expérience, il suffit d'interposer entre un électroscope à balles de sureau E (fig. 3), chargé par exemple positivement, et l'aigrette *e*, un cadre *c*, sur lequel sont tendus un certain nombre de fils métalliques distants de 2 ou 3 centimètres. Ceux-ci établissent le raccordement du champ et la décharge est à peu près enrayée. Mais il suffit de communiquer aux fils *f* une légère charge positive pour empêcher tout raccordement. A partir de cet instant, la décharge se produit (1).

§ 3. — *Diverses sources radioactives.*

Avant de poursuivre cet exposé, il importe de remarquer que presque tous les foyers d'ébranlement de l'éther jouissent de la même propriété que l'aigrette, de développer dans le milieu environnant la production d'ions libres ; il en est ainsi de l'étincelle, de flammes et, en général, comme l'a montré le Dr Gustave le Bon, de toutes les combinaisons chimiques. Lorsque des

(1) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* 1898, 3e sér., t. XXXV, pp. 188-191.

vibrations éthérées très rapides, telles que celles qui correspondent aux rayons lumineux ou aux rayons Röntgen, rencontrent la matière, le même phénomène se produit. C'est par l'observation de cette action de la lumière que le Dr Gustave le Bon eut le premier la perception que l'on se trouvait en face d'un nouvel ordre de phénomènes naturels. Becquerel découvrit vers la même époque que les composés de l'uranium semblent produire spontanément ce phénomène; M. et Mme Carie découvrirent des substances plus actives encore. Ici encore le Dr Gustave le Bon montra toute la généralité du phénomène, qui se rencontre à un très faible degré pour un grand nombre de métaux.

Ainsi que nous l'avons vu, si l'on place un objet dans la direction de l'aigrette, celui-ci s'électrise par induction électrostatique, cette charge ne pouvant du reste pas dépasser une certaine limite par suite de l'action de décharge que nous venons d'examiner et qui contrebalance le premier effet. Les foyers radioactifs dont nous venons de parler ne déterminent que des actions électriques faibles ou inappréciables, soit parce que la tension électronique est faible lors de leur émission, soit parce que ceux-ci ont été émis sans orientation préalable.

§ 4. — *L'infra-électricité.*

Il résulte de ce que nous venons de dire que les ions constituent par leur ensemble *un gaz de nature particulière*, capable de décharger les corps électrisés. L'air renfermant ce gaz particulier peut être conduit par des tuyaux à distance, ainsi que le montre une expérience de Branly. Mais il est aisé d'enlever à l'air cette propriété de décharger les corps électrisés. Considérons, en effet, une cage en plomb *c* (fig. 4), dans laquelle se trouve un électroscope chargé E. Cette cage est munie d'un tube T de même métal, à l'extrémité duquel est adapté un tube *t* amenant l'air d'une soufflerie. Des étincelles jaillissent entre les électrodes *e*, afin de déterminer l'ionisation; enfin une toile

métallique *m*, en contact avec une feuille de carton *f*, faiblement conductrice, peut être électrisée à l'aide d'une machine électrostatique.

Lorsque le courant d'air est introduit par le tube *t*, il s'ionise en passant sur l'étincelle *e*; en arrivant à l'électroscope E, il le décharge. Mais si la toile *m* est électrisée, la décharge ne se produit plus. En effet, considérons un ion *i* (fig. 5), placé dans le voisinage d'un conducteur chargé positivement par exemple : au moment où il subira l'action de l'influence, il s'orientera d'abord ainsi que la figure l'indique; étant ensuite précipité vers le conducteur, il tendra à neutraliser celui-ci par induction électrostatique, ainsi que nous l'avons vu, et réciproquement. En un mot, le conducteur électrisé condense les ions libres.

Il était également intéressant de chercher la loi qui régit les variations de la vitesse de décharge avec la distance dans un milieu calme, ainsi que l'action des gaz dans lesquels l'expérience est produite.

L'appareil n'est autre que celui que nous avons représenté par la figure 6 et qui dispense de toute description. La tige *t* est mise en communication avec la terre, de telle manière que le plateau p' joue le rôle de plateau de condensateur. La distance qui séparait le plateau p' du plateau p'' était de 9 millimètres environ. La poudre radioactive ou le liquide combustible était disposé sur le plateau *p* en *g*.

Dans ces conditions, aucun rayon émanant de ces sources ne pouvait venir rencontrer le conducteur électrisé, et la décharge était le résultat d'une manifestation se transmettant de proche en proche dans l'espace intermédiaire. S'il en est ainsi, on doit s'attendre à trouver une certaine analogie entre les lois qui régissent la propagation de la chaleur et celles qui régissent la propagation de l'énergie dont nous nous occupons.

Nous avons effectivement constaté que les variations des temps de décharge lorsque l'on fait varier x s'expriment par une formule de la forme

$$t = B + Axe^{a\sqrt{x}}.$$

Dans cette expression, B, A et a représentent des constantes.

L'électroscope étant chargé positivement, on trouve pour la flamme d'alcool :

(Courbe I) (fig. 7) $t = 2 + 0{,}16xe^{0{,}28\sqrt{x}}$.

L'électroscope étant chargé négativement :

(Courbe II) $t = 5 + 0{,}163xe^{0{,}39\sqrt{x}}$.

Pour la poudre radioactive :

L'électroscope étant chargé positivement :

(Courbe III) $t = 15 + 0{,}372xe^{0{,}019\sqrt{x}}$.

L'électroscope étant chargé négativement :

(Courbe IV) $t = 17 + 0{,}4xe^{0{,}0745\sqrt{x}}$.

Si l'on dispose l'appareil de manière à pouvoir faire varier la pression, on trouve que *la vitesse de décharge devient plus grande lorsque la pression diminue.*

On sait que l'inverse a lieu si le conducteur est soumis à une radiation, ainsi que nous l'avons du reste vérifié à l'aide du même appareil pour les rayons X.

La nature du gaz exerce une influence qui peut être considérable. C'est ainsi que l'on trouve dans l'air, dans le gaz d'éclairage et dans l'anhydride carbonique, des temps de décharge qui sont respectivement représentés par 36, 30 et 77.

Ces nombres permettent de reconnaître que le phénomène n'est pas étroitement lié au phénomène de la diffusion, la vitesse de décharge étant à peu près la même dans l'air et dans le gaz d'éclairage.

La nature de la flamme exerce également une influence considérable; c'est ainsi que l'alcool brûle avec une flamme très active, alors que l'activité de la flamme de sulfure de carbone est presque nulle.

Les ions libres sont fortement condensés par les corps voisins. Si l'appareil est mis sous une cloche ou à l'intérieur d'un manchon en verre, la vitesse de décharge est diminuée dans une grande proportion, même si l'extrémité inférieure du manchon

affleure avec le niveau de la poudre. Les choses se passent comme si l'on voulait montrer la propagation de la chaleur dans un gaz, alors qu'une paroi voisine serait à très basse température.

En résumé, nous pouvons conclure que lorsqu'un objet électrisé se trouve dans un milieu ionisé, les ions non seulement tendent à décharger la surface électrisée, mais soumis à l'action de l'influence ils se précipitent en masse à sa surface et constituent, par leur ensemble, un fluide élastique auquel nous avons donné le nom de *fluide infra-électrique*. Il se comporte, dans le voisinage des corps électrisés, comme le ferait une veine liquide ou gazeuse s'échappant d'une tuyère et se précipitant sur ces corps.

Il est aisé maintenant de voir que l'on pourra réaliser, à l'aide de ces projections, les mêmes figures géométriques que celles obtenues à l'aide de veines liquides s'échappant sous pression de tubes convenablement disposés et dirigés vers une surface plane.

Si l'on dirige des jets d'eau sur des lames de verre A, B, C (fig. 8), les tubes adducteurs étant disposés en t, t' ; t_1, t'_1, t''_1 ; t_2, t'_2, t''_2, t'''_2, on voit se former des lignes droites à la rencontre des lames liquides dirigées en sens inverse, comme la figure l'indique.

Afin de réaliser l'expérience avec le fluide infra-électrique, il suffit de placer autour d'un plateau P de résine, préalablement électrisé par friction à l'aide d'un conducteur d'une machine électrostatique, des foyers ionisants, par exemple des becs de Bunsen, ou des pointes métalliques mises en communication avec l'un des pôles d'une bobine, de préférence avec le pôle négatif.

Dans ces conditions, les ions ne possèdent pas seulement la faculté de décharger plus ou moins le plateau, mais le fluide qu'ils constituent, par son inertie, ne tarde pas à refouler les ions électrisés de la surface de manière à les répartir sur des droites de faible épaisseur. Après quelques instants de pose, on saupoudre le plateau avec de la poudre de soufre et l'on obtient les figures A, B ou C, suivant le nombre de foyers dont on a fait usage.

Le même résultat s'obtient à l'aide de poudres radioactives que l'on peut déposer en petits tas sur le plateau de résine. Seulement, le temps de pose nécessaire, au lieu d'être d'une fraction de minute, peut atteindre 15′ et au delà.

Si maintenant on dirige perpendiculairement à un plan une série de jets d'eau, la figure réalisée par la rencontre des lames liquides dépendra de la disposition géométrique de ceux-ci. S'ils sont disposés en carrés, on obtient des carrés ; s'ils le sont en triangles ou en quinconces, des hexagones ; s'ils le sont en hexagones, des triangles.

Ces figures s'obtiennent avec la plus grande facilité à l'aide des projections ioniques dues à l'action attractive de l'influence. Il suffit de disposer pendant quelques instants au-dessus du plateau de résine électrisé un plateau à double paroi, dans lequel on introduit du gaz d'éclairage, et de pratiquer dans celui-ci des ouvertures qui correspondent aux sommets des figures géométriques dont nous avons parlé et qui représentent autant de flammes projetantes. (Voir photogramme III.)

Les carrés avaient 10 centimètres de côté.

Si l'on vient à électriser deux parties séparées *a* et *b* d'un plateau de résine P (fig. 9) et à placer pendant quelques instants une pointe *p* au-dessus du plateau, l'aigrette développée par celle-ci déterminera la production du fluide *infra-électrique*, lequel viendra frapper et s'étendre sur le plateau ; les points d'impacte correspondent nécessairement aux centres de gravité des surfaces électrisées. Il en résulte que l'on obtient, après avoir couvert légèrement de poudre de soufre, les apparences représentées en *a* et en *b* simultanément et à l'aide d'une seule pointe *p*.

Au lieu de placer la pointe au-dessus du plateau, il est plus commode de disposer, avant la coulée de la résine, un morceau d'ébonite *e* traversant la feuille de carton *c* (fig. 10) et percé d'une ouverture permettant le passage d'une pointe *p*, laquelle peut à volonté être isolée ou mise en communication avec le sol.

Afin d'opérer, la pointe étant isolée, on la recouvre d'un petit godet métallique *g*, puis on électrise à l'aide d'un conducteur mobile mis en communication avec une machine électrique et

tenu par un manche isolant. On exécute des frictions circulair es à l'intérieur d'un cercle c, puis, l'électrisation terminée, on met la pointe à la terre, on enlève le godet *g* (fig. 11) et l'on projette une première fois une petite quantité de poudre ; si le plateau est bien sec et bien poli, on obtient une circonférence parfaite. Mais on ne tarde pas à remarquer que des particules de soufre sont entraînées suivant une direction radiale, sous l'action du souffle ionique d'appel. Si, quelques instants après, on projette de la poudre, on obtient un deuxième cercle, et l'on réalise ainsi une série de circonférences concentriques traversées de ramifications dirigées suivant les rayons, si l'on a fait usage d'électricité positive (fig. 12).

Le fluide infra-électrique qui s'étend à l'intérieur des cercles possède une force expansive considérable. Il nous est arrivé de voir l'électricité répartie sur une ligne circulaire. Dans ces conditions, la poudre de soufre constituait un petit rempart. Cependant le fluide s'accumulait progressivement sur la surface intérieure du cercle, et à un moment donné se produisit une véritable explosion superficielle, qui eut pour résultat de projeter une partie de la poudre de soufre à plusieurs centimètres, suivant des directions radiales.

Nous avons vu que ces émissions émanant d'une source quelconque n'affectent jamais le bord de la surface électrisée, mais entament toujours cette surface par son milieu. Il en résulte que nous obtiendrons deux systèmes de circonférences, l'un qui va en s'agrandissant, l'autre beaucoup plus petit, dans le voisinage de la pointe, qui va en diminuant.

En utilisant deux pointes métalliques, disposées à 15 centimètres, on peut produire une série de figures intéressantes et qui dépendent du mode d'électrisation de la surface.

1° Si l'on électrise tout le plateau et si l'on projette plusieurs fois, à quelques instants d'intervalle, de la poudre de soufre, on obtient une série de courbes concentriques qui se forment dans l'ordre indiqué par les numéros de la figure 13.

Il est facile de voir que le fluide élastique superficiel a été émis d'abord en proportion plus grande par la pointe A que par la

pointe B; sa tension est évidemment plus grande; aussi les cercles intérieurs sont-ils plus petits en A qu'en B.

Cependant le fluide émis par A est projeté d'abord jusque dans le voisinage immédiat de B, et cela au point de donner à ses cercles intérieurs la forme elliptique qui indique nettement l'action de cette pression; la tension de ce fluide ne tarde pas à être contrebalancée par la pression du fluide émis plus lentement par B, de manière à produire la succession des traits α.

2° Si l'on électrise une ellipse α (fig. 14), on obtient la figure en forme de *8* correspondant au premier cas (fig. 15). Mais ce qu'il y a de particulièrement intéressant à constater, c'est la rapidité avec laquelle l'espace non électrisé est envahi par l'électricité et dans les conditions nécessaires pour former la figure d'équilibre.

3° On peut même aller plus loin et n'électriser que les parties α et β (fig. 16).

Afin de faire l'expérience à l'aide des ions développés dans l'atmosphère par le passage des rayons Röntgen, on réalise deux faisceaux de rayons Röntgen *a* et *b* (fig. 17) à l'aide d'un tube à rayons A, placé derrière un écran en plomb P, percé de deux ouvertures. Le plateau de résine électrisé est disposé en R, notablement en dessous des ouvertures *a*, *b*, afin d'éviter l'action des rayons directs.

Les ions libres de ces deux faisceaux attirés et projetés normalement à l'axe, ces faisceaux s'étendent sur le plateau en lames qui viennent se rencontrer et déterminent une droite parfaitement déliée en *mn*.

Les faits que nous venons d'examiner étant le résultat de l'existence d'ions libres dans l'espace qui, à un moment donné, peuvent être attirés par les corps électrisés, il est évident que le phénomène de l'ombre électrique que nous venons de montrer se produira, quelle que soit la position de la source ionisante.

Considérons le plateau de résine électrisé P (fig. 18) en projection horizontale, un écran *e* formé d'une lame métallique de 1 centimètre de largeur et la flamme d'un bec de Bunsen *f* placée en arrière.

En vertu de ce que nous avons dit, les ions placés dans l'espace E déterminent l'ombre de l'écran *e*. Nous avons désigné ce phénomène sous le nom d'*ombre rétrograde*.

Si nous plaçons le plateau électrisé en P (fig. 19), un tube à rayons Röntgen en T, une partie de ces rayons traverseront le plateau P et déchargeront celui-ci; mais la surface correspondant à l'écran *e* sera protégée par suite de la stabilité du champ raccordé et nous obtiendrons une ombre irrégulièrement tracée, par suite de l'inégale répartition de l'électricité sur le plateau.

On peut encore montrer, à l'aide de ces expériences, l'action préservatrice du champ électrostatique raccordé. A cet effet, nous avons disposé sur un plateau de résine un gros fil métallique incliné *af* (fig. 20); en *f* se trouve la flamme très petite d'un chalumeau à gaz, dirigée suivant le sens de la tige. On remarque dans ces conditions que les électrons *ab*, étant reliés par influence aux tourbillons de *af*, possèdent une position stable. Il en résulte que la tige *af* détermine une ombre rectiligne en *ab*.

On peut encore faire l'expérience suivante : Disposons au-dessus d'un plateau allongé de résine un dard de chalumeau *d* (fig. 21) placé horizontalement; en *e* se trouve un gros fil métallique faisant écran; la partie *a*, *b* constituera la partie préservée, mais, d'autre part, la lame infra-électrique produite en A aura pour résultat de faire glisser les tourbillons suivant une direction *m*, alors que la pression produite en *m'* en sens contraire, est plus faible. Il résulte de cette circonstance un déplacement de l'ombre dans la direction *m*, lequel sera d'autant plus accentué que le temps de pose aura été plus long. Nous avons remarqué une déviation de l'ombre vers le point B de 61 millimètres pour une pose de 30″; pour une pose d'une minute, cette déviation atteint 82 millimètres.

Points d'émission de la flamme. — Afin de nous rendre compte de la position des points d'émission de la flamme, nous nous sommes servi d'un dard de chalumeau disposé à côté du plateau électrisé P (fig. 22). Perpendiculairement à ce plateau est placé un gros fil métallique *a*. La direction de l'ombre *t* que l'on obtient dans ces conditions indique la direction de la résultante

des actions des projections ioniques qui émanent de la flamme. Ces expériences indiquent que le cône bleu *b* est peu efficace. Les projections émanent surtout de la partie rosée *r*.

M. Weber, en répétant nos expériences, a eu l'ingénieuse idée de se demander si le souffle d'un gaz sortant d'une tuyère ne modifiait pas la forme de ces figures [1]. Ce physicien a effectivement constaté une déformation, mais il est difficile de se rendre compte, d'après ce travail, si le souffle sortant de la tuyère n'agit pas directement sur l'électricité répandue sur le plateau, ou bien si ce souffle agit uniquement, dans le milieu ambiant, sur l'émanation qui détermine la production de la figure.

Afin de nous assurer si le souffle d'un gaz n'atteignant pas le plateau de résine électrisé était capable de déformer les figures géométriques, nous avons exécuté les expériences suivantes : en P (fig. 23) se trouve le plateau de résine électrisé, en *e* un petit écran métallique formé d'une lame verticale, en *t* une tuyère plate mise en communication avec un cylindre renfermant de l'anhydride carbonique (cylindres que l'on trouve dans le commerce), en *f* la flamme d'un brûleur de Bunsen, ou une pointe *placée verticalement* mise en communication avec l'un des pôles d'une forte bobine. On place la pointe verticalement, afin d'éviter l'intervention du vent électrique bien connu.

Cela étant, on remarque qu'en faisant usage de la flamme, on obtient un trait parfaitement rectiligne en trente secondes de temps, mais cette ombre disparaît complètement si pendant ce temps la tuyère a été mise en marche. *Le mouvement de l'émanation venant de la flamme a donc été troublé.*

Si nous remplaçons la flamme par l'aigrette, nous remarquons encore le trouble produit par le souffle, bien que cette émanation semble offrir une résistance plus grande à cette action que l'émanation de la flamme.

Dans ces conditions, l'émanation *e* partant de la pointe *p* (fig. 24) s'incurve sous l'action du souffle de la tuyère, ainsi que

[1] *Annalen der Physik*, 1891, t. VI, p. 96.

la figure l'indique, et au lieu d'obtenir un trait rectiligne en o, on obtient une ligne tout à fait irrégulière en o'.

La même expérience répétée avec les rayons X ne produit aucune déviation du trait.

A première vue, on serait tenté d'admettre que dans ce cas l'émanation n'est pas influencée par le souffle; cependant il n'en est rien, car si l'on détermine le souffle entre l'écran et le plateau, le résultat est le même que dans les cas précédents : on obtient la disparition de l'ombre. Il faut donc admettre que dans l'expérience de la figure 1, faite avec les rayons X, l'émanation qui produit la figure prend naissance entre la tuyère et le plateau, par suite du passage de ces rayons.

Il résulte de l'ensemble de ces expériences que l'émanation infra-électrique produite par presque tous les foyers d'ébranlement de l'éther, laquelle, en s'étalant sur un diélectrique, constitue un fluide élastique, est d'une nature plus matérielle, ou mieux, formée d'une substance moins raffinée que les rayons X. Cette émanation est absolument comparable aux rayons cathodiques; comme eux, elle se propage avec une vitesse relativement grande, car un électroscope placé à 2 mètres d'une aigrette est atteint instantanément. Comme ces rayons, cette émanation subit l'action directe d'une *substance matérielle tangible,* et, dans le cas d'une étincelle, elle émane de la cathode. M. Crookes a reconnu, après nous, que cette particularité se vérifie pour les ions émis par les substances radioactives.

Si donc nous admettons, avec presque tous les physiciens, que sous l'action des foyers d'ébranlement de l'éther il se développe une ionisation plus ou moins avancée, nous pouvons admettre que ces ions sont projetés par la source, de même que dans les tubes à vide les ions sont projetés par la cathode.

Nous voyons ainsi l'idée de Crookes se généraliser; son quatrième état de la matière, ce qu'il appelle *matière radiante,* ne représente autre chose qu'un gaz formé d'ions. Nous voyons qu'on la rencontre, non seulement dans les tubes à vide, mais aussi disséminée dans les gaz sous la pression normale.

§ 5. — *L'asymétrie des pôles.*

Si l'on vient à électriser un plateau de résine par frictions à l'aide d'un conducteur électrisé négativement et si ensuite on effectue ces mêmes frictions à l'aide d'un conducteur chargé positivement, les deux électricités se recombinent et finalement le plateau est chargé positivement.

Mais les choses se passent tout autrement si l'on électrise d'abord le plateau positivement.

Si, dans ces conditions, on effectue une friction à l'aide d'un conducteur chargé négativement, la reconstitution n'a plus lieu ; chaque point chargé négativement devient un foyer d'émission infra-électrique, qui, en s'étendant sur la surface, refoule l'électricité positive comme le ferait le fluide émis par une flamme, une aigrette ou un tube à rayons X.

Nous avons même réussi à déterminer une ligne médiane comparable à celle que l'on peut obtenir à l'aide de ces sources.

A cet effet, nous nous sommes servi d'un plateau en résine A (fig. 25), mesurant 30×35 centimètres.

Une zone relativement étroite *ab* était chargée positivement à l'aide d'un conducteur relié à l'un des pôles d'une machine de Holtz et tenu à la main par un manche isolant.

Un deuxième conducteur, présentant la forme figure 26, était ensuite mis en communication avec le pôle négatif de la machine, et l'on effectuait une friction suivant la direction $\alpha\beta$ (fig. 25). La distance des deux petites sphères était inférieure à la largeur *ab* électrisée positivement (environ 45 millimètres).

En couvrant légèrement de poudre de soufre, on remarque d'abord qu'une certaine quantité d'électricité positive a été projetée à droite et à gauche, alors qu'en γ (fig. 26) on obtient une ligne médiane.

L'image a l'aspect général représenté figure 27. (Voir le photogramme III.)

Un phénomène du même ordre a été constaté en observant la propagation d'un courant télégraphique se propageant par un

fil conducteur en partie recouvert d'oxyde de cuivre CuO. La partie CB (fig. 28) étant recouverte de CuO, AC étant dénudé, on remarque que le courant dirigé de A vers B se propage avec facilité. En effet, l'électron $+\alpha$ de la substance conductrice neutralise aisément l'électron négatif γ du diélectrique, de même que dans notre expérience.

Mais si α est $-$ et $\gamma +$, la neutralisation, ainsi que nous l'avons vu, se fait beaucoup plus difficilement et dès lors la propagation du courant est enrayée, au moins en partie.

En résumé, un *conducteur* portant une charge positive se neutralise plus facilement sous l'action d'un *diélectrique* électrisé négativement que si l'on suppose le conducteur négatif et le diélectrique positif. Ce dernier peut du reste être supposé ionisé, ainsi que cela se produit nécessairement pendant l'action de la décharge.

Ce fait présente le plus haut intérêt, car il constitue la base de l'interprétation des curieux phénomènes que l'on observe dans l'électrolyse et dans les tubes à vide. Les ions du *conducteur* cathodique sont neutralisés avec une difficulté beaucoup plus grande par les ions orientés du milieu ambiant que le pôle de nom contraire. L'énergie de mouvements ou le nombre de rencontres des ions, pour obtenir le même résultat, doit donc être beaucoup plus grand à la cathode. Ces ions en excès, ne pouvant rétrograder vers l'anode, pourront constituer des projections ioniques particulièrement intenses à ce pôle, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer. Ce sont également ces projections qui, comme nous le verrons, sont l'origine des rayons cathodiques.

Courants produits dans les milieux gazeux. — Si donc nous considérons la production du courant dans un milieu gazeux, il faudra, pour établir la compensation, amener à la cathode un nombre d'ions beaucoup plus grand qu'à l'anode, c'est-à-dire développer à l'anode un transport ionique particulièrement intense vers la cathode. Mais ceux-ci, se trouvant maintenant en ce point, ne peuvent en totalité rétrograder vers l'anode où ils se trouveraient en excès. Dès lors, deux hypothèses sont possibles : ou bien ces ions se fixeront à la cathode, ou bien ils ne s'y fixe-

ront pas; alors ils constitueront les projections dites cathodiques.

Le deuxième cas est celui de l'étincelle; c'est également le cas que nous examinerons dans les tubes à vide. Le premier cas est réalisé dans l'arc électrique.

L'arc électrique. — Si l'on réunit par des fils deux morceaux de charbon taillés en pointe, aux bornes d'un producteur de courant, on remarque une vive lumière si, après avoir mis ces charbons en contact, on les écarte légèrement.

En effet, par suite de la température élevée produite au contact très résistant, il s'est produit non seulement une évaporation, mais aussi une ionisation du gaz compris entre les charbons qui dès lors devient conducteur, mais dont la résistance est cependant suffisante pour déterminer une température que l'on estime à 3500°.

Or, d'après ce que nous avons vu plus haut, il doit se produire un transport d'ions du pôle positif vers le pôle négatif beaucoup plus abondant que le transport en sens contraire. D'où il résulte que le charbon cathodique s'allonge en forme de pointe, alors que le charbon anodique se creuse et présente la forme d'un cratère. On remarque également que l'arc électrique est le siège d'une force contre-électromotrice ayant la même origine que la polarisation électrolytique dont nous nous occuperons plus loin.

Point d'émission de l'étincelle électrique. — Nous nous sommes servi du même procédé que pour la flamme. Les deux pôles d'un excitateur réunis à une machine de Holtz et l'aiguille *a* formaient un triangle équilatéral de 7 à 8 centimètres de côté (fig. 29). L'expérience montre que les projections émanent de la cathode.

Nous retrouvons donc le même excès d'ions à la cathode, mais au lieu de se fixer comme dans l'arc, ils sont projetés dans l'espace et provoquent une émanation infra-électrique.

Dans la décharge oscillante, l'émission paraît émaner de tous les points de l'étincelle.

Le phénomène Edison. — Ce phénomène est encore un corollaire du même principe. Si l'on place une lame métallique *p* à l'intérieur d'une lampe à incandescence alimentée par un

courant continu et que l'on relie intérieurement cette lame à l'extrémité positive A du filament par un circuit renfermant un galvanomètre, on observe un courant dirigé du filament à la lame.

Dans cette expérience, le filament joue le rôle du diélectrique. Il en résulte, comme nous l'avons vu, l'existence d'un excès d'ions α (fig. 30) à la cathode, qui, ne pouvant rétrograder, sont mis en liberté et constituent une espèce de rayon cathodique qui relie la cathode C à la plaque p, de manière à réaliser le courant dans le sens nominal de la flèche f.

On remarque que l'intensité du courant, c'est-à-dire la force électromotrice croît avec la surface de la plaque p, mais pas proportionnellement, ainsi que nous l'avons fait observer dans le paragraphe de l'induction électrostatique.

CHAPITRE IV.

Les rayons dits cathodiques et l'électrolyse.

---

§ 1. — *Nature des rayons cathodiques.*

Nous avons examiné jusqu'à présent les phénomènes produits par les ions libres disséminés dans l'atmosphère, attirés par les corps électrisés, produisant ainsi des courants ouverts et le fluide infra-électrique lorsqu'ils rencontrent les surfaces électrisées.

Nous avons vu que l'induction électrostatique était le résultat de la projection d'ions possédant une tension électronique. Ces projections au moment du départ de la source peuvent se comporter à certains égards comme une radiation proprement dite, se transmettre en ligne droite et déterminer sur leur parcours des actions photographiques et électriques, traverser les métaux et subir, dans certains cas, des actions de l'aimant.

H. Becquerel découvrit que les sels d'uranium jouissaient de la propriété d'émettre spontanément des effluves de cette espèce, capables de traverser les corps opaques et les métaux, notamment l'aluminium. Mais il crut d'abord qu'il se trouvait en face d'un phénomène appartenant à l'ordre de ceux qui furent découverts par Niepce de Saint-Victor, en un mot, qu'il s'agissait d'une espèce de lumière emmagasinée, se polarisant comme la lumière proprement dite. Le Dr Gustave le Bon reconnut qu'il s'agissait d'un ordre de phénomènes nouveaux qu'il avait déjà pressenti, et montra que la polarisation n'existait pas.

Nous nous trouvons maintenant en présence de projections d'ions, lesquelles peuvent présenter la *forme* correspondant au courant. S'il en est ainsi, ces émanations seront déviées par l'aimant, phénomène qui fut reconnu par H. Becquerel en examinant les traces photographiques obtenues par ces émanations

lorsqu'elles sont soumises à un champ magnétique. Si ces projections présentent une autre *forme,* il n'y aura pas déviation. Il en sera également ainsi pour des radiations proprement dites, de forme particulière et se produisant dans l'éther, que nous examinerons plus loin. La vitesse de projection, la dimension et la tension électronique, ainsi que l'ordre ou la forme de ces projections, pourront varier. On peut donc concevoir des variétés en nombre infini de ces manifestations.

Les substances radioactives découvertes par Becquerel, ainsi que par M. et M^me^ Curie, émettant spontanément des ions, sont entièrement comparables aux corps volatils qui émettent spontanément des molécules; il s'agit, en un mot, d'une évaporation à l'état d'ions. Cette évaporation est du reste l'apanage de presque tous les métaux, ainsi que cela a été démontré par le D^r^ Gustave le Bon. Comme nous l'avons dit, si ces projections se produisent dans l'ordre voulu, elles représentent un courant en partie simple, déviable par l'aimant, déviation qui pourra varier avec la vitesse des ions et leur tension électronique. La force de pénétration dépendra de la forme, de la masse et de la vitesse des ions.

Des manifestations de cet ordre se produisent d'une manière particulièrement remarquable dans les tubes à vide.

§ 2. — *Forme du courant rendue directement visible. Cause de la production des rayons cathodiques. Propriétés diverses.*

Lorsqu'un gaz est fortement raréfié, ses éléments se décomposent en ions, c'est-à-dire qu'il devient iodynamique et conducteur de l'électricité, et, ainsi que nous l'avons vu, il transmet alors le courant de manière à rendre sa *forme* appréciable, sous l'apparence de stries alternativement obscures et brillantes.

Mais si le chemin de libre parcours des ions atteint toute la longueur du tube, on remarque que la cathode, au lieu de condenser les ions en excès, comme dans les phénomènes de l'arc, les projette à peu près normalement à la surface cathodique que

nous pouvons supposer plane, de manière à constituer un système de projections rectilignes que l'on désigne sous le nom de rayons cathodiques. Telle est l'expérience qui a été réalisée par Hittorf et par Crookes.

Ces projections ont la faculté de rendre la surface anticathodique du verre luminescente, de déterminer sur ce dernier des ombres parfaitement définies, si l'on vient à intercepter un écran, et sont capables de déterminer la rotation de moulinets convenablement disposés sur leur parcours, ainsi que cela se passe pour une roue hydraulique, montée sur un cours d'eau.

Ces projections, qui, par leur ensemble, constituent un véritable courant en partie simple, sont susceptibles d'être déviées par l'aimant.

Lénard, ayant repris ces expériences, reconnut que si la surface anticathodique est formée d'une lame d'aluminium très mince, les ions sont capables de la traverser. Après leur sortie, ils se diffusent d'autant plus dans le milieu ambiant que la pression est plus élevée et conservent, en dehors de cette particularité, leurs propriétés primitives.

Nous allons examiner maintenant d'une manière plus détaillée la succession des phénomènes qui ont été observés dans les tubes à vide.

Rappelons encore qu'un tube à stries représente l'*image théorique d'un courant* dont les espaces sombres correspondent aux espaces de libre parcours des ions, les parties brillantes aux espaces occupés par les molécules iodynamiques. Nous avons également constaté, *par l'observation* au miroir tournant, que cette apparence striée, bien loin d'être le résultat d'un mouvement oscillatoire du courant, ne se produit que si, par un procédé quelconque, on fait passer l'énergie électrique *d'une manière continue* dans le tube. *C'est le courant normal.* Si l'énergie est transmise trop rapidement, les éléments n'ont pas le temps de prendre l'arrangement strié régulier et la décharge est diffuse.

Le tube à vide dont nous avons fait usage présente la forme bien connue (fig. 1); le tube *t* avait un diamètre de 3 à 4 millimètres, largeur favorable à l'observation des stratifications.

La continuité ou la discontinuité de la décharge était observée à l'aide d'un miroir tournant à quatre faces faisant environ deux tours à la seconde et dont l'axe de rotation est disposé parallèlement au tube.

a) Nous avons fait usage d'abord d'une forte bobine d'induction activée par un interrupteur à main, de manière à pouvoir nous rendre compte de l'effet produit par chaque décharge de fermeture ou de rupture considérée isolément. Nous avons remarqué que, dans ces conditions, chaque décharge déterminait une illumination stratifiée du tube. Celle-ci, examinée au miroir tournant, déterminait une longue bande lumineuse, divisée par des lignes qui correspondaient aux stratifications (fig. 2).

A côté de ces strates en apparence continues se trouvaient fréquemment deux ou trois images du tube *a*, *b*, indiquant des illuminations instantanées.

b) Nous avons fait usage de l'interrupteur de Whenelt, fournissant des interruptions extrêmement rapides. Les strates examinés au miroir tournant ont fourni *pour chaque décharge* deux ou trois images des tubes fort élargies *m*, *n* (fig. 3), fréquemment accompagnées d'images (*a*) non élargies et non stratifiées du tube, correspondant à des illuminations instantanées.

c) Chacun des pôles de la bobine (interrupteur à main) était mis en communication avec trois toiles métalliques séparées par deux lames de verre *o* et *o'* (fig. 4), lesquelles, se comportant vis-à-vis de l'énergie électrique comme de véritables ressorts, déterminaient à chaque décharge une série d'oscillations.

Le miroir tournant indiquait dans ces conditions que *chaque décharge* de la bobine fournissait une série de décharges alternantes, les unes instantanées et non stratifiées, les autres élargies et stratifiées (fig. 5). L'alternance se reconnaissait aisément à l'illumination des petites sphères qui se produisait tantôt à la partie supérieure, tantôt à la partie inférieure du tube, ainsi que l'indique la figure 5.

d) En portant à cinq le nombre des glaces et à six le nombre des toiles métalliques, chaque interruption de la bobine (interrupteur à main) détermine une série de décharges instantanées

et toute trace de stratification disparaît. Le miroir tournant nous en offre l'image (fig. 6), c'est-à-dire que chaque interruption de la bobine fournit deux ou trois décharges exécutées dans un sens et deux ou trois décharges exécutées en sens opposé.

e) En utilisant l'interrupteur de Whenelt, le nombre des images est plus petit (fig. 7) à chaque interruption, mais le résultat général est le même.

f) Le tube éclairé à l'aide de l'oscillation unipolaire [1] montre deux images alternantes instantanées, avec absence de strates.

Cette expérience nous montre de plus que cette oscillation est très lente et s'amortit rapidement.

g) La machine de Holtz fournit une succession d'images instantanées très rapprochées, se traduisant par des traits lumineux. Si l'on ajoute un condensateur, ces traits sont plus éloignés. Mais, dans tous les cas, cette instantanéité détermine la disparition des strates.

h) Si l'on interpose une forte résistance (des flammes de Bunsen), les images instantanées sans strates sont fréquemment accompagnées d'images élargies du tube et stratifiées. La réapparition des strates par suite de l'interposition d'une résistance était, du reste, connue.

Deuxième série d'observations. — Cette série d'observations a été exécutée à l'aide d'un miroir unique tournant avec une vitesse de vingt tours à la seconde, soit environ une vitesse dix fois supérieure à la première.

a) Les mêmes caractères se sont maintenus. L'observation faite avec l'interrupteur Whenelt et cinq glaces interposées, et qui présentait encore de légères traces de stratifications, nous a montré le système de deux tubes à pôles alternants (fig. 7), mais qu'une grande vitesse montrait encore élargis (conséquence de la trace de stratification), bien qu'incomparablement moins larges que sans interposition de glaces. Dans ces conditions, l'image

[1] Nous avons montré précédemment que si l'on met un des pôles d'une forte bobine en communication avec une toile métallique, celle-ci émet des oscillations électriques à distance, lesquelles sont capables d'illuminer les tubes à vide.

affectait la forme d'une série de traits horizontaux, comme dans la première expérience.

b) Le tube étant éclairé à l'aide de l'oscillation unipolaire, nous montre les mêmes caractères que l'expérience précédente; les strates sont plus atténuées encore et, de même, les images de tubes élargis se montrent moins accentuées. Les deux traits fondamentaux (fig. 7) se dédoublent en un grand nombre de traits verticaux généralement déliés.

c) En portant à dix le nombre des glaces, on obtient le même résultat. Les images tendent de plus en plus à se résoudre en une série de traits verticaux.

d) C'est la machine de Holtz, sans condensateur et sans résistance, qui présente au plus haut degré une série de décharges rapides.

Le tube est absolument exempt de strates et présente au miroir tournant rapide une série de traits verticaux déliés et régulièrement espacés.

La machine de Ramsden détermine les mêmes caractères.

Examen spectroscopique. — Les caractères spectraux présentent la plus étroite analogie avec ceux qui nous sont offerts par le miroir tournant. On peut formuler cette conclusion en disant : A mesure que les décharges deviennent plus instantanées dans le tube ou, en d'autres termes, à mesure que le miroir tournant nous offre des traits verticaux de plus en plus déliés, nous assistons à la disparition des strates. Dans les mêmes conditions, nous voyons le spectre, à raies brillantes nettement définies, s'effacer progressivement pour faire place à un spectre qui présente de plus en plus les caractères d'un spectre à bandes brillantes.

La série de photographies de spectre d'un tube à hydrogène (photogramme IV) montre cette conclusion d'une manière évidente.

De plus, l'effacement des raies se produit dans l'ordre de réfrangibilité, en allant de la partie la plus réfrangible à la partie la moins réfrangible du spectre.

De même qu'une pression gazeuse *continue* appliquée conve-

nablement à un tube provoque la vibration sonore, de même une force électromotrice appliquée *avec persistance* dans un sens déterminé et sous une tension suffisante est capable de produire dans un tube à vide une série de nœuds et de ventres comparables à ceux du son.

Si, au contraire, la force électromotrice capable de vaincre la résistance du tube s'exerce d'une manière instantanée (traits lumineux déliés), l'équilibre dynamique correspondant à la production des nœuds et des ventres n'a pas le temps de s'établir et le tube présente l'aspect laiteux.

Chaque fois que le miroir tournant nous montre un tube élargi, il est accompagné de strates; s'il n'est pas sensiblement élargi, les strates sont absentes.

Il est vraisemblable que, dans les mêmes conditions, les atomes n'ont pas le temps de prendre leur état d'équilibre dynamique normal, et c'est la raison pour laquelle le spectre continu ou à bandes tend à se substituer au spectre à raies.

En résumé : 1° *l'élargissement du tube dans le miroir tournant, c'est-à-dire l'accroissement du temps de la décharge;* 2° *l'apparition des strates;* 3° *la disparition du spectre à bandes pour faire place à un spectre à raies nettement accentuées, sont des phénomènes connexes.*

Si donc nous nous plaçons à ce point de vue, un conducteur parcouru par un courant est comparable à un tube sonore dans lequel on produit des nœuds et des ventres.

Il est également nécessaire d'observer que le pôle positif se comporte comme un foyer d'émission entièrement comparable à l'émission d'un souffle qui aurait traversé l'embouchure d'un tube sonore, alors que le pôle négatif se comporte comme un foyer d'émission comparable à un souffle ne produisant pas le phénomène du son.

Considérons une ampoule sphérique (fig. 8) dans laquelle *c* représente l'espace sombre de Crookes, L la lumière cathodique, S, S′, S″ les stries lumineuses, les flèches barbelées le sens du mouvement des ions, F l'espace sombre de Faraday.

Dans le voisinage de la cathode, l'énergie de mouvement ionique

s'accentue par suite de la difficulté qu'elle éprouve à se neutraliser. Mais ici les ions, au lieu de se déposer sur la cathode ou de déterminer des projections en tous sens, continuent à faire partie du courant. Nous voyons alors cet accroissement d'énergie cathodique se traduire par un accroissement des espaces sombres.

Remarquons que dans l'espace strié qui représente le courant, les ions, tout en conservant leur orientation, se déplacent dans deux sens opposés, ainsi que l'indiquent les flèches barbelées. Mais à mesure qu'on s'avance du pôle positif vers le pôle négatif, les mouvements de va-et-vient ont une tendance à se canaliser, en d'autres termes, les ions d'aller ont une tendance à se grouper entre eux, de même des ions de retour.

Nous n'observerons plus que les effets dus aux ions canalisés. Ceux-ci partent de la dernière strie apparente et se dirigent vers la cathode qui, elle, à son tour, envoie des ions canalisés en sens contraire, d'où rencontre de ces deux flux de sens contraire pour déterminer la lumière cathodique en L; mais remarquons de plus que ceci nous oblige à admettre l'existence de deux flux d'ions canalisés en sens contraire qui ne sont pas indiqués sur la figure.

En résumé, l'espace strié représente le courant normal, c'est-à-dire le courant en partie double; il se comportera donc vis-à-vis de l'aimant comme un courant flexible soutenu à ses deux extrémités. La partie canalisée cathodique représente un courant en partie simple; il se comporte donc comme un courant flexible exclusivement fixé à la cathode. C'est là ce que Wiedemann avait déjà reconnu par l'expérience (fig. 9).

Mais si l'espace de libre parcours cathodique atteint toute la longueur du tube, les choses se simplifient notablement. Le courant continuera à s'établir entre la cathode et l'anode comme précédemment, mais sans production de stries, et les ions en excès à la cathode seront projetés à peu près normalement à celle-ci pour constituer le rayon cathodique (fig. 10).

Rappelons d'abord que les ions α projetés par la cathode (fig. 11) ne sont pas mis en mouvement par une action électrique telle qu'on la concevait, mais bien par l'action pulsante

de Bjirckness développée entre les électrons et qui, comme nous le verrons, représente l'action répulsive du calorique. Nous obtiendrons ainsi le courant cathodique en partie simple, le sens du mouvement des ions étant indiqué par les flèches barbelées.

Mais toute la surface du tube joue maintenant le rôle d'anode dans une certaine mesure, de telle manière qu'un courant d'ions part de tous ces points, se dirige en sens contraire et constitue le courant de retour, qui représentait l'espace de Faraday. Tels seront, par exemple, l'ion β et l'ion β'.

Il est facile de voir maintenant quelles seront les diverses manifestations électriques qui se produiront *et qui sont la conséquence de l'induction électrostatique.*

Lorsque l'ion α (fig. 12) *s'écarte* de l'électron négatif, *il tend* à changer de signe, mais, en général, la difformation ne va pas jusqu'au renversement. L'électron négatif γ, en *s'approchant* d'une surface *s*, électrisera celle-ci négativement, ainsi que cela a été reconnu.

Lorsque le gaz est à une pression relativement élevée, la vitesse des ions est relativement faible, et l'électron γ conserve toujours son caractère négatif; mais dans les gaz très raréfiés, l'induction électrostatique peut redevenir telle que γ devienne γ', ou, en d'autres termes, l'ion se renverse; dès lors, γ' étant substitué à γ, la surface *s s'électrisera positivement sous l'action des rayons cathodiques.*

L'ancienne théorie se trouve dans l'impossibilité la plus absolue d'interpréter ce fait, qui est une conséquence nécessaire de cette théorie.

Si nous considérons maintenant les ions de retour, ils *tendront* à devenir entièrement négatifs (fig. 13) par le fait du rapprochement de la cathode. Mais l'électron γ, ayant cependant conservé son caractère positif, électrisera positivement la surface *s* en s'en approchant.

On peut, de même que dans le premier cas, concevoir un renversement complet γ'. La surface *s* s'électriserait alors négativement, mais, à ma connaissance, ce cas n'a pas été observé jusqu'à présent.

Action d'une charge statique sur les rayons cathodiques. — L'expérience réalisée par Jaumann présente, à ce point de vue, un vif intérêt, car elle échappe à toute explication dans l'ancienne théorie.

La disposition indiquée figure 14 est introduite dans un bain d'huile et soumise à l'action de décharges oscillantes. On diminue de cette manière la *tension* des rayons, c'est-à-dire l'action attractive réciproque des ions, de manière à les rendre plus sensibles à une action extérieure. On observe, dans ces conditions, sur la surface *ab* une tache brillante intérieure, entourée d'un anneau brillant.

Jaumann a reconnu que la tache brillante intérieure correspond aux rayons cathodiques ordinaires que nous venons d'examiner, et dès lors *déviables par une charge électrostatique.* L'anneau correspond au courant qui relie la cathode à l'anode, constituée ici par la surface de verre de l'ampoule *ab.*

Les ions du courant, ainsi que nous l'avons vu, sont orientés de la même manière que les ions du rayon cathodique; mais, à l'inverse de ce qui se passe dans celui-ci, les mouvements de translation s'exécutent dans deux sens opposés (fig. 15). Il résulte de cette circonstance que les actions d'induction électrostatique produites par une charge statique se font équilibre. *L'anneau ne sera pas dévié.*

Remarquons encore que toutes les décharges ne correspondent pas à un son fondamental unique. La *tension* des rayons cathodiques pourra donc varier, d'où déviation inégale sous l'action de la charge statique et production d'un véritable spectre cathodique. Nous pouvons, à l'aide de ces rayons faiblement tendus, réaliser l'expérience qui nous a permis de démontrer l'existence de l'induction électrostatique.

Si l'on approche un corps électrisé positivement d'un autre corps, celui-ci tend à prendre une charge de même nom; le corps en mouvement tend à se déplacer en sens inverse du mouvement qu'on lui communique. *Si le deuxième corps était libre, il serait donc repoussé pendant le mouvement.* L'inverse a lieu lors de l'éloignement. C'est cette expérience *fondamentale* que

Jaumann a réalisée en approchant du rayon cathodique un bâton de verre électrisé. Pendant l'approche, le rayon est repoussé; lors de l'éloignement, il est attiré.

Cette expérience, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, n'est autre que celle que nous avons réalisée à l'aide d'une balle de sureau suspendue à un fil de cocon.

Remarquons encore que pendant l'approche du bâton de verre positif, les électrons négatifs qui déterminent la fluorescence du verre tendent à devenir positifs, d'où diminution de l'éclat de la tache. Au contraire, lorsqu'on éloigne le bâton, ils tendent à devenir plus négatifs, d'où accroissement de la fluorescence.

La deuxième expérience de Jaumann est tout aussi inexplicable que la première par l'ancienne théorie. Ayant disposé son ampoule entre les deux plateaux d'un condensateur, il a remarqué qu'au moment de la charge, il y avait une déviation momentanée des rayons du plateau positif vers le plateau négatif, et que l'inverse avait lieu lors de la décharge.

Nous avons vu que le même phénomène se produit encore en substituant au rayon cathodique une balle de sureau. Il s'agit donc ici encore d'un fait fondamental et non d'un phénomène particulier aux tubes à vide.

Action de l'aimant. — L'action de l'aimant est indépendante du sens du mouvement des ions. La déviation se produira donc tant pour le courant en partie simple (rayon cathodique) que pour le courant normal en partie double. La déviation de la tache et de l'anneau de Jaumann se produira donc simultanément sous l'action de l'aimant.

De même que pour l'action de la charge électrostatique et pour les mêmes raisons, nous pourrons obtenir un spectre étalé cathodique, ainsi que cela résulte des expériences de Birkeland.

§ 3. — *L'électrolyse.*

Si l'on substitue à un conducteur quelconque une solution électrolytique, les choses se passeront exactement de la même

manière, avec cette différence que le courant, au lieu de se faire en partie double, se fait en partie quadruple. Chaque ion portant à la fois un électron positif et un électron négatif, ces ions ne se fixeront pas aux électrodes *et il n'y aurait pas de dépôt électrolytique*. Celui-ci est encore la conséquence de l'asymétrie des pôles.

Nous avons vu que l'équilibre dynamique du courant exigeait la mise en jeu d'un nombre d'ions et par conséquent d'un nombre d'électrons plus grand à la cathode qu'à l'anode (fig. 16). Mais il existe nécessairement le même nombre d'électrons orientés à la cathode et à l'anode. Par conséquent, si nous supposons, par exemple, que deux électrons sont mis en jeu à la cathode et un électron à l'anode, *un* électron sera disponible (fig. 17) à ce pôle; il ne tardera pas à être occupé par un ion négatif ne prenant pas part au courant, si la force électromotrice est suffisante pour enrayer sa quantité de mouvement.

Il existera maintenant un ion positif en excès, lequel, en vertu du mouvement préexistant, gagnera plus ou moins facilement le pôle opposé où il se soudera. S'ils y parviennent tous, l'électrolyse sera dite normale; s'il n'en est pas ainsi, l'électrolyse sera anormale; mais le nombre d'ions acides présents au pôle positif sera nécessairement plus grand que le nombre d'ions positifs présents au pôle négatif, ce que l'expérience vérifie.

Nous voyons, dès lors, la cause de la polarisation des électrodes. Nous voyons également que cette raison s'ajoute à celle que nous avons indiquée précédemment pour expliquer le transport de matière vers le pôle négatif; les ions positifs libres, animés de plus grandes vitesses, entraînant les molécules, vont en se dirigeant dans ce sens. De plus, la contradiction entre l'observation et la théorie admise, laquelle implique un mouvement plus rapide des ions négatifs dans l'électrolyse anormale, alors que le mouvement de transport se fait en sens contraire, disparaît. Si la force électromotrice n'est pas suffisante pour fixer les ions négatifs, l'excès de la quantité de mouvement, développée au pôle positif, déterminera encore le déplacement vers la cathode.

Nous voyons que le mécanisme de l'électrolyse est le même que celui des tubes à vide. Les rayons cathodiques sont formés par les ions qui ne parviennent pas à se souder à la cathode.

Mais, dans l'électrolyse, le courant d'ions allant de l'anode vers la cathode est plus tangible et mieux utilisable que le courant développé par les ions en excès, qui s'échappent de la cathode, afin de réaliser des expériences de projection.

Tous ces effets peuvent s'observer facilement en faisant usage de solutions dans la gélatine (1).

On peut d'abord observer le transport des ions positifs vers le pôle négatif, en introduisant à la partie inférieure d'un verre à lampe une solution gélatineuse de sulfate de cuivre; lorsqu'elle est coagulée, on dispose à la partie supérieure une solution de gélatine et de sel marin (fig. 18). Deux tubes semblables sont préparés. Dans le premier, on fait passer le courant de douze éléments de Daniel; le second n'est pas soumis au courant. On observe alors, après une quinzaine de jours, que la diffusion du cuivre vers le pôle négatif est notablement plus accentuée dans le tube mis en circuit que dans l'autre.

On peut encore procéder de la manière suivante : On construit, à l'aide de lames de verre, une cuvette de forme allongée (fig. 19). On y verse d'abord une solution de sel marin et de gélatine. Lorsque celle-ci est coagulée, on découpe un parallélipipède *a b c d*, que l'on enlève, et l'on verse dans l'espace vide une solution de sulfate de cuivre et de gélatine. Lorsque le tout est solidifié, on fait passer le courant comme dans l'expérience précédente, et l'on remarque que la diffusion est plus accentuée en *bc* qu'en *ad*.

Si l'on introduit dans une cuvette en porcelaine (fig. 20) une solution de sulfate de cuivre et de gélatine sur une épaisseur de 1 centimètre environ, on remarquera que le niveau s'abaisse dans le voisinage du pôle positif et se relève dans le voisinage du pôle négatif, résultat du transport d'un pôle à l'autre.

(1) Ces solutions renfermaient 20 % de gélatine. La solution de NaCl renfermait 3.25 % de ce sel. La solution de $CuSO_4$ renfermait 14.6 % de $CuSO_4 + 5H_2O$.

Afin de nous rendre encore mieux compte du *souffle* anodique, nous avons introduit au fond d'une cuvette à glaces parallèles (fig. 21) une solution de gélatine et de sulfate de cuivre. Après la coagulation, elle a été recouverte d'une toile, afin d'éviter une diffusion trop rapide, puis le tout a été recouvert d'une solution de gélatine et de sel marin. On remarqua, après quelques jours, que les ions cuivre sont *soufflés* dans l'espace *ab*. La limite nettement marquée *ac* indique cette action. On remarque en *a* un plissement à la surface de la gélatine, qui indique la limite de la projection.

Le *souffle anodique*, dans le phénomène de l'électrolyse, existe donc au même titre que le souffle cathodique dans les tubes à vide et que le souffle ionique ou électronique émanant de presque tous les foyers d'ébranlement de l'éther, et dont nous avons reconnu l'existence à l'aide des figures géométriques prévues par l'hydrodynamique et déterminant notre fluide infra-électrique qui en est le résultat. Si l'anode, dans l'électrolyse, donne lieu à un phénomène semblable, nous pourrons reproduire ces mêmes figures. Il en est réellement ainsi.

Afin de réaliser l'expérience, nous avons coulé au fond d'une cuvette en verre (fig. 22) une solution de sel marin et de gélatine sous une épaisseur de 2 ou 3 centimètres; trois fils de platine, réunis entre eux et placés en triangle, plongent par une de leurs extrémités dans la gélatine ; le pôle négatif est placé en un point quelconque. Lorsque la solution est prise, on établit le courant à l'aide d'une douzaine d'éléments de Daniel. On remarque d'abord la production d'un cercle autour de chaque fil. Lorsque ces cercles sont réunis, on voit apparaître les trois droites se coupant en un point, ainsi que la figure l'indique, que l'on observe par transparence et qui s'observent également en relief à la surface d'une manière très déliée.

Les circonférences produites autour du pôle positif ne sont nullement déformées par la cathode. Mais cette dernière est influencée par l'anode. En effet, la cathode creuse dans la gélatine un enfoncement elliptique dont le grand axe est dirigé vers l'anode. *Les électrons polaires anodiques jouent donc le rôle actif.*

Le souffle anodique devant nécessairement déterminer une pression, nous devions la retrouver à l'aide de l'osmomètre. Nous avons donc disposé dans une solution de sulfate de cuivre deux osmomètres munis de membranes de vessie, ainsi que l'indique la figure 23. En faisant usage du courant d'une douzaine de Daniel, on voit, après quelques heures, la pression anodique se manifester par un relèvement du liquide dans le tube de l'osmomètre, alors que l'osmomètre négatif accuse une dépression.

Il résulte donc de ceci que l'accroissement de vitesse des ions par le voisinage immédiat des électrons polaires est dû, à l'anode, à une projection; à la cathode, à une succion.

Les accumulateurs. — Lorsqu'un certain nombre d'ions négatifs se seront condensés sur l'anode et qu'une condensation semblable se sera produite dans le sens positif sur la cathode, il suffira de relier les deux électrodes pour obtenir un courant de sens contraire.

Afin d'obtenir ce résultat de l'accumulation de l'énergie électrique dans la pratique, on se sert de lames de plomb plongées dans de l'eau acidulée d'acide sulfurique.

Les piles. — Nous avons vu, lorsque nous nous sommes occupés de l'électrisation par contact, que l'on classe les métaux dans l'ordre de leurs caractères positifs.

Le courant de la pile est le résultat de l'électrisation au contact d'un métal électro-positif avec un électrolyte. Le mécanisme est le même que celui de l'électrolyse, la polarité positive du métal étant ici la cause déterminante.

La *polarisation*, c'est-à-dire la tendance à la production d'un courant de sens contraire, se produira de la même manière.

Afin d'éviter cet inconvénient, on a construit les piles à deux liquides dont le type le plus parfait est représenté par la pile de Daniel.

Dans cette pile, le métal électro-positif est représenté par un cylindre de zinc, le liquide électrolytique par une solution diluée d'acide sulfurique. Un vase en terre poreuse renferme une solution de sulfate de cuivre, dans laquelle plonge une lame de cuivre.

Si le circuit est ouvert, les ions s'orienteront simplement par influence et il n'y aura pas production de dépôt électrolytique. Si, au contraire, le circuit est fermé, les propriétés du courant apparaîtront sous la forme indiquée pour l'électrolyse.

Les ions négatifs SO_4 se fixeront sur les ions zinc de manière à produire du sulfate de zinc neutre et de ce chef il ne pourra pas y avoir polarisation. Les ions positifs, en se déposant au pôle opposé, tendront à produire ce résultat, mais en traversant le vase poreux ils rencontrent la solution de sulfate de cuivre, s'emparent des ions SO_4 pour former de l'acide sulfurique, et les ions cuivre, dont la tension électro-positive peut être considérée comme négligeable par rapport à la tension des ions d'hydrogène, ne déterminent pas de polarisation appréciable. Le principe des autres procédés de polarisants est toujours le même.

CHAPITRE V.

Les courants à extrême fréquence ou les courants calorifiques.

§ 1. — *Introduction à la théorie électromagnétique du calorique.*

La matière est donc constituée de telle manière que si elle est soumise aux mouvements vibratoires du milieu éthéré qui l'environne, on voit apparaître des phénomènes calorifiques, lumineux ou électriques.

Afin de faire apparaître l'une ou l'autre de ces manifestations, il suffit de régler convenablement le temps de la vibration. Lorsque la fréquence du courant atteint celle de la vibration lumineuse ou calorifique, nous dirons qu'il y a *extrême fréquence.*

Lorsque notre organisme est traversé par des courants à très haute fréquence, il cesse de percevoir le phénomène électrique, mais il percevrait le phénomène calorifique si cette oscillation pouvait atteindre la rapidité de l'oscillation de ces rayons.

En réalité, lorsque l'énergie électrique se transforme en chaleur, en traversant un conducteur, cela veut dire que l'énergie électrique du courant continu est transformée en énergie électrique à *extrême fréquence,* le temps de l'oscillation correspondant au temps de l'oscillation calorifique.

Le courant électrique continu ou, plus exactement, les électrons polaires jouent le même rôle vis-à-vis des ions du conducteur que l'archet au déplacement continu vis-à-vis de la corde tendue, ou encore que la pression continue exercée à l'extrémité d'un tube sonore vis-à-vis de l'air qu'il renferme.

En partant de cette considération, la conception d'une ligne isotherme dans un conducteur correspond à celle d'un fil con-

ducteur parcouru par des courants à *extrême fréquence*, la température étant donnée par la loi de Joule.

Considérons un conducteur A (fig. 1) soumis à l'action d'une source de chaleur S. Toutes les tranches parallèles T, T′ à la face *ab* sont des isothermes (nous faisons abstraction de la conductibilité superficielle et du rayonnement extérieur) et, dans notre conception, représentent une série de conducteurs parcourus en tous sens par des courants à extrême fréquence et soumis à l'induction mutuelle.

Or, l'intensité moyenne du courant induit par un de ces conducteurs sur le conducteur voisin aura pour expression

$$\theta = \frac{i\mathrm{F}}{d},$$

i représentant l'intensité du courant inducteur, F sa fréquence et d la distance de deux branches voisines.

Or, nous pouvons admettre que pour un même métal, lorsque la différence de température entre la série des tranches que l'on considère est faible, que F est constant (*),

$$\theta = i \times \mu,$$

μ étant une constante.

D'autre part, la quantité de chaleur développée dans une tranche, laquelle définira la température absolue de la tranche induite, aura pour expression

$$\mathrm{Q} = \frac{kri^2}{425} \times \mu'.$$

Or r, représentant la résistance en fonction de la longueur et de la section du conducteur, est constant. k représente la résis-

(*) La formule de Rubens nous enseigne que les fréquences extrêmes correspondant à l'extrémité du spectre varient proportionnellement à la racine carrée de la température absolue.

tance spécifique du métal considéré. Si nous adoptons toujours les mêmes dimensions, nous pourrons poser $r = 1$, d'où

$$Q = \frac{kt^2}{425} \times \mu' = T \times \text{const.},$$

T représentant la température absolue de la tranche inductrice.

Réciproquement, la quantité de chaleur induite par la tranche subissant cette première induction aura pour expression

$$Q' = \frac{kt'^2}{425} \mu = T' \times \text{const.}$$

La quantité de chaleur qui passera de la première tranche à la deuxième sera déterminée par l'équation

$$Q - Q' = (T - T') \times \text{const.} = \frac{k(t^2 - t'^2)}{425} \mu.$$

Nous pouvons donc dire que la différence de température T—T' entre la tranche inductrice et la tranche induite est directement proportionnelle à la résistance électrique du métal (ou inversement proportionnelle à sa conductibilité) et directement proportionnelle à la différence des carrés des intensités des courants.

De même, toutes choses étant égales, cette différence de température sera directement proportionnelle à la résistance calorifique ou inversement proportionnelle à la conductibilité calorifique.

Ou, finalement, *la conductibilité calorifique et la conductibilité électrique sont des quantités proportionnelles.*

La température absolue d'une ligne isotherme est, d'autre part, comme on le sait, exprimée par la demi-force vive des éléments; nous aurons donc la relation

$$\frac{Mv^2}{2} = rt^2.$$

La masse M des éléments ou, en d'autres termes, la résistance

que ces éléments opposent au mouvement correspond donc à la résistance électrique. La vitesse des éléments correspond à l'intensité du courant. Or, si nous considérons un conducteur,

$$r = k\frac{l}{s},$$

l étant la longueur du conducteur et s sa section, et comme les actions s'exercent indifféremment suivant toutes les directions, nous pourrons poser $l = s$ ou $r = k$.

D'où

$$\frac{Mv^2}{2} = ki^2 = T \times \text{const},$$

ou

$$i = \sqrt{\frac{T}{k}},$$

ou encore

$$i = \sqrt{\frac{M}{2k}v^2};$$

et puisque $\frac{M}{k} = \text{const.}$,

$$i = v \times \text{const.},$$

Nous pourrons donc dire :

1° *L'intensité des courants a extrême fréquence est directement proportionnelle à la racine carrée du quotient de la température absolue par le coefficient de résistance.*

2° *L'intensité du courant à extrême fréquence est directement proportionnelle à la vitesse des masses mises en jeu.*

La loi de Dulong et Petit pourra s'exprimer par la relation

$$\frac{mv^2}{2} = \rho i^2 = \text{const.}$$

Le produit de la résistance atomique par le carré de l'intensité du courant à extrême fréquence est une constante.

Or, remarquons maintenant que tous les corps solides deviennent incandescents à peu près à la même température, d'où il résulte que la vitesse de vibrations v de l'électron est sensible-

ment la même pour tous les corps ; il en est par conséquent de même de la masse *m*.

Nous pouvons donc dire que la masse électronique *libre*, c'est-à-dire celle qui est susceptible d'être mise en jeu à un moment donné pour émettre ou pour absorber des radiations, est la même pour les masses désignées sous le nom de masses atomiques.

La chaleur ne représente donc pas à proprement parler le mouvement d'agitation des éléments, ainsi que cela est admis pour les gaz, mais ce mouvement d'agitation est proportionnel, pour ces corps supposés parfaits, au mouvement de vibration des électrons, lequel est lui-même proportionnel à la force électromotrice ou à la vitesse de giration.

Conclusion. — Il résulte donc de ceci que tous les métaux sont parcourus en tous sens par des courants à extrême fréquence, dont l'intensité est proportionnelle à la $\sqrt{\ }$ du coefficient de conductibilité.

S'il en est ainsi, on peut s'attendre à trouver, lors de leur application sur des organes malades, des actions physiologiques comparables à celles obtenues par les courants à *haute fréquence*.

Cette conclusion s'est présentée tout naturellement à notre pensée, alors que nous ignorions complètement la métallothérapie de Burq (1849) et du Dr Charcot.

Ces agents avaient été désignés sous le nom d'agents *aestégéogènes*. Régnard admet le développement de courants électriques ; Vigouroux, une polarité électrique ; Schiff, un effet dû à des vibrations moléculaires. On voit, d'après ce que nous venons de dire, que cette dernière interprétation est l'équivalent de la première.

Lorsqu'un métal rayonne de la chaleur, la fréquence des oscillations fournie par l'étendue du spectre est à peu près la même pour tous les métaux, $F = f(T)$. Cependant, il importe de remarquer que chaque métal est accordé plus ou moins spécialement pour certaines fréquences; c'est ainsi que les courants de l'or sont particulièrement susceptibles de vibrer à la fréquence du jaune et tamisent les oscillations de l'extrémité du spectre.

Il en résulte que le courant fourni variera non seulement en

raison directe de la $\sqrt{\ }$ du coefficient de conductibilité, mais présentera, si je puis m'exprimer ainsi, *des nuances* qui dépendront de la nature du métal.

Les actions répulsives du calorique. — Ces actions peuvent se diviser en deux classes, celles que l'on pourrait désigner sous le nom d'apparentes, et qui sont le résultat du mouvement d'agitation des éléments.

La force expansive des gaz se rattache à ce phénomène, mais elle n'exclut pas les actions attractives mutuelles. Ces dernières actions deviennent apparentes lorsqu'on détend un gaz dans le vide; il se produit alors une absorption de chaleur, ainsi que le remarque M. Van der Waals. Mais il est évident, d'autre part, que les chances de rencontre des éléments n'étant pas nulles, si ce mécanisme était seul en jeu, il en résulterait fatalement une condensation finale. D'autre part, les expériences de M. Amagat ont permis de reconnaître que cette action répulsive devient *réelle* pour de très hautes pressions; la détente détermine un dégagement de chaleur.

La matière est donc constituée de telle manière que les actions attractives des éléments deviennent répulsives du moment où le rapprochement devient suffisant.

Cela étant, prenons le cas le plus simple, celui de l'isotherme d'un corps conducteur, assimilable à un fil parcouru par un courant à *extrême fréquence*, et considérons les électrons a, b, a', b' (fig. 2); ceux-ci étant de signes alternants, *il y aura toujours attraction si l'oscillation n'existe pas.*

Mais ici intervient d'une manière bien inattendue la belle expérience des corps pulsants de Bjerckness, à l'aide de laquelle d'autres physiciens et nous-même avions cru trouver l'origine des actions électriques à distance. Impuissante à rendre compte de la multiplicité des phénomènes électriques, elle nous donne l'explication de l'action répulsive du calorique. En effet, par suite de l'action attractive des électricités de noms contraires, les électrons ne tarderont pas à s'orienter ainsi que l'indique la figure. Mais, d'autre part, en vertu de leur mouvement oscillatoire rapide, *les électrons se comportent également comme les*

corps pulsants de signes contraires de Bjerckness qui se repoussent. Il en résulte que *si le rapprochement des éléments atteint une limite, une action répulsive se substituera à l'action attractive.*

Si nous orientons les ions suivant une direction déterminée par le passage du courant, les actions répulsives se manifesteront d'une manière plus sensible suivant la direction du courant, et il y aura allongement du conducteur.

Conséquences d'un abaissement de température. — Considérons un électron A électro-positif (fig. 3) vibrant à une température T, l'amplitude de l'oscillation étant β et sa force électromotrice moyenne correspondant à l'angle α.

Si la température s'abaisse, sa tension diminuera, α deviendra α'. Les choses se passeront à peu près comme si une corde vibrante se détendait. L'amplitude β et la vitesse de vibration diminueront. Et à la limite extrême qui correspond au zéro absolu, nous aurons $\alpha = 90°$, $\beta = 0$.

Le même raisonnement s'applique à l'électron négatif.

Il est facile de voir quelles sont les conséquences que ce mécanisme entraîne.

Les ions perdront progressivement, à mesure que le refroidissement s'accentue, leur caractère électro-positif ou électro-négatif; dès lors apparaîtra l'inaptitude à la réaction chimique observée par Pictet aux basses températures.

D'autre part, les actions répulsives résultant du mouvement pulsant diminueront également, d'où absence de phénomène de dissociation.

Par suite de la diminution des actions répulsives, les électrons se rapprocheront; ils seront, dès lors, plus aptes à subir des actions d'influence mutuelles sous l'action d'électrons polaires; dès lors, la conductibilité croîtra.

Enfin, si le zéro absolu était réalisable dans l'univers, les électrons présentent la forme de disques tournants, d'où la possibilité de l'existence, à cette température, d'un gaz formé d'*ions libres*, condition qui est sensiblement réalisée dans les nébuleuses.

Un pareil gaz étant du reste comparable, à certains égards, aux gaz que nous connaissons :

1° De même que les gaz ordinaires, les éléments seraient doués d'actions répulsives *apparentes*, correspondant au mouvement d'agitation dont l'origine se trouve dans le mouvement de rotation des éléments;

2° A l'inverse des gaz que nous connaissons, toute action attractive ou répulsive, que l'on désigne sous le nom d'action atomique ou moléculaire, est supprimée; l'action newtonienne seule subsiste.

Remarquons maintenant que dans le voisinage du zéro absolu, ces gaz formés d'ions pourront déjà émettre les oscillations lentes que l'on désigne sous le nom d'oscillations à haute fréquence, oscillations qui se transmettent par induction d'électron à électron et se comportent à peu près comme l'oscillation lente de l'archet du violoniste vis-à-vis de la corde vibrante. A cette oscillation très lente s'en superposeront donc d'autres excessivement rapides, qui communiqueront à ces gaz la propriété d'être par eux-mêmes luminescents aux plus basses températures. Ils ne sont, du reste, autre chose que nos gaz très raréfiés, parcourus par des courants à haute fréquence.

La hauteur des notes lumineuses rendues par ces électrons qui se comportent maintenant comme de véritables plaques vibrantes, pliant alternativement dans deux sens opposés, suivant le sens du mouvement de l'archet, dépendra des dimensions de la plaque ou de l'électron.

Cette dernière conception paraît en contradiction avec ce que nous avons dit plus haut. Nous voyons, en effet, des électrons à très faible tension émettre des vibrations très rapides. Celles-ci doivent être considérées comme des harmoniques. L'électron se comportait comme une corde tendue se subdivisant en un certain nombre d'espaces ventraux. La même interprétation s'applique aux phénomènes de phosphorescence ou de lumière froide ainsi qu'à la production d'éclat anormal lorsque certains sels sont portés à l'incandescence. Le phénomène de la fluorescence paraît devoir s'interpréter d'une manière analogue.

En résumé, le zéro absolu représente donc la température à partir de laquelle l'énergie de la matière devient constante. Si la température s'élève, la tension électrique apparaît en même temps que les pulsations qui correspondent à ces tensions qui représentent l'énergie calorifique. Nous verrons jusqu'à quel point cette conception se vérifie lorsque nous examinerons l'électrisation développée par la chaleur dans les cristaux.

§ 2. — *La conductibilité calorifique, le pouvoir absorbant et la couleur des corps.*

Corps conducteurs. — Lorsqu'une oscillation lumineuse ou calorifique atteint la surface d'un métal, les ions qui constituent ce corps peuvent ou ne peuvent pas vibrer à l'unisson, de même que l'onde sonore détermine ou ne détermine pas la vibration du diapason.

S'il en est ainsi, les ondes accordées avec les ions de la substance que l'on considère feront vibrer les ions superficiels, lesquels restitueront en tout ou partiellement l'énergie reçue au milieu ambiant, sous forme de rayon réfléchi.

Les ondes qui auront été amorties verront, au contraire, leur énergie se transformer en énergie de rotation électronique, c'est-à-dire en chaleur.

Le pouvoir réflecteur nous donne donc la mesure de l'élasticité des électrons d'une substance donnée, de la faculté qu'ils possèdent de vibrer sous l'action d'une oscillation de l'éther qui les baigne, ou encore de la faculté de transmettre de couche en couche une oscillation à extrême fréquence. *Les corps doués du plus grand pouvoir réflecteur sont donc, en général, les meilleurs conducteurs de la chaleur et de l'électricité.* (Cette proposition a été vérifiée par M. Rubens depuis la publication de cette proposition.)

La couleur d'un métal par réflexion sera donc déterminée par les ondes qui sont accordées avec les ions superficiels; les rayons non accordés sont absorbés ou passent si la lame est suffisamment mince.

L'or est jaune par réflexion et vert par transparence.

Les substances aniodynamiques, diélectriques et, par conséquent, théoriquement transparentes, ne sont jamais vues par réflexion (nous faisons abstraction de la réflexion spéculaire); pour celles-ci, l'oscillation se propage en pleine matière ou s'amortit en se transformant en chaleur; il n'y a donc pas de réflexion proprement dite. Des oscillations qui n'ont pas été amorties pénètrent à une certaine profondeur, où, par suite de la non-homogénéité, elles peuvent rencontrer des faces orientées de manière à déterminer la *réflexion spéculaire*. Ces rayons reviennent donc vers la surface tout en ayant été soumis aux mêmes actions que les rayons vus par transparence.

La surface d'un diélectrique déterminant la *réflexion spéculaire* serait comparable à un mur capable de réfléchir toutes les ondulations d'un liquide. Au contraire, le mécanisme de la *réflexion métallique* serait comparable à une série de diapasons ne réfléchissant que des radiations pour lesquelles ils sont accordés.

L'introduction de la lumière ou de la chaleur rayonnante dans un milieu métallique est comparable à l'introduction d'une infinité de filaments animés de mouvements giratoires et oscillatoires dans le sens de leur longueur.

Les oscillations qui rencontrent des électrons susceptibles de vibrer à l'unisson déterminent la lumière ou la chaleur réfléchie proprement dite. Les autres filaments gyroscopiques pénètrent dans le milieu, accroissent la vitesse angulaire de rotation et de déplacement des éléments, c'est-à-dire la quantité de la chaleur.

Dans les diélectriques, le deuxième de ces phénomènes correspond aux rayons non transmis, le phénomène de la réflexion proprement dite, dans lequel la nature de la substance entre en jeu, ne se produisant jamais.

Lorsqu'un gaz, par exemple, absorbe de la chaleur, l'éther communique à ses éléments un accroissement de vitesse de rotation. Cette énergie de rotation est ensuite partiellement transformée en énergie de translation, et l'accroissement d'énergie de vibration qui résulte des chocs représente le dernier terme du

processus. Si l'oscillation se communique directement aux éléments matériels, il n'y a pas absorption, mais bien réflexion.

Si l'on reçoit les rayons réfléchis par un miroir en cuivre sur une glace dépolie, on constate la teinte rouge; il est donc rouge par réflexion. Mais si l'on opère de la même manière avec un verre rouge, il ne se produit plus de coloration; il est donc incolore par réflexion; cette réflexion est spéculaire.

Indice de réfraction et capacité. — Si l'on considère un diélectrique D (fig. 4) transmettant l'influence d'électrons polaires e, e', le mouvement giratoire de ceux-ci aura pour conséquence d'orienter les électrons des molécules du diélectrique et d'emmagasiner, dès lors, une certaine quantité d'énergie correspondant à la capacité inductive spécifique. Cette quantité d'énergie maximum qu'un diélectrique sera capable de fixer, sera proportionnelle à la masse μ des électrons.

D'autre part, considérons un rayon lumineux pénétrant dans un diélectrique parfaitement transparent.

Avant de pénétrer dans le milieu, nous aurons la relation

$$V_0 = \lambda v_0,$$

V_0 représentant la vitesse de la lumière dans le vide, λ la longueur d'onde et v_0 la vitesse des éléments d'éther normalement au sens de la propagation. Si nous représentons par m la masse de ces éléments, leur force vive sera mv_0^2.

Mais lorsque le rayon aura pénétré dans le diélectrique, l'énergie de vibration n'aura pas été modifiée, mais la masse vibrante sera maintenant représentée par la masse μ des électrons. Nous aurons donc

$$mv_0^2 = \mu v^2,$$

v représentant cette même vitesse dans le diélectrique.

Comme la longueur d'onde est restée la même, v sera proportionnel à la vitesse V de propagation dans ce milieu. D'où

$$mV_0^2 = \mu V^2.$$

Pour un autre diélectrique, nous aurons de même

$$mV_0^2 = \mu_1 V_1^2.$$

Combinant ces deux relations, il vient

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{V_1^2}{V^2} = \frac{n^2}{n_1^2},$$

n et n_1 représentant les indices de réfraction correspondants. Et si nous remarquons que les capacités que nous représenterons par k et k_1 sont proportionnelles à μ et μ_1, nous aurons finalement

$$\frac{k}{k_1} = \frac{n^2}{n_1^2},$$

c'est-à-dire la relation de Maxwell.

Ceci suppose que l'élasticité des électrons est la même que celle de l'éther libre, comme l'indique la formule de Newton.

Les recherches de Kundt montrent que dans les conducteurs, la vitesse de propagation de la lumière est inversement proportionnelle aux résistances électriques et calorifiques.

Nous avons donc la relation

$$\frac{V_1}{V} = \frac{R}{R_1}.$$

D'autre part, si nous admettons, ainsi que nous l'avons dit, que la résistance électrique représente la résistance au mouvement, c'est-à-dire la masse des électrons, nous aurons

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\mu}{\mu_1}.$$

Ensuite, d'après la formule de Newton, nous avons

$$\frac{V_1^2}{V^2} = \frac{e_1\mu}{e\mu_1} = \frac{R^2}{R_1^2},$$

e et e_1 représentant l'élasticité, ou

$$\frac{e_1}{e} = \frac{\mu}{\mu_1},$$

et finalement

$$\frac{R}{R_1} = \frac{e_1}{e},$$

ce que l'on peut exprimer en disant que *la résistance à la propagation de l'électricité sera d'autant plus grande que l'élasticité des électrons sera plus petite.* De même que dans le phénomène de la propagation du son.

Si nous reprenons la relation

$$\frac{e_1}{e} = \frac{\mu}{\mu_1},$$

nous remarquerons que l'élasticité du milieu éthéré varie en raison inverse de la densité de l'éther. Ce milieu se comporte donc comme étant formé d'éléments exerçant les uns sur les autres des actions attractives d'autant plus grandes que la masse des éléments est elle-même plus grande, ou encore une force expansive d'autant plus grande que la masse de ces éléments est plus petite.

Cela étant, la formule de Newton

$$V = \sqrt{\frac{e}{\mu}}$$

pourra encore s'écrire

$$V = a\sqrt{\frac{1}{\mu^2}},$$

a représentant une constante, ou

$$V = \frac{a}{\mu}.$$

La vitesse de propagation du mouvement vibratoire dans le milieu éthéré varie donc en raison inverse de la densité de ce milieu.

Si nous admettons cette relation pour les diélectriques, l'équation de Maxwell, au lieu de s'écrire sous la forme

$$\frac{k}{k_1} = \frac{n^2}{n_1^2},$$

se mettra sous la forme

$$\frac{k}{k_1} = \frac{n}{n_1}.$$

La *capacité électrique* représente la quantité d'*énergie électronique ou de rotation* que la matière est susceptible d'emmagasiner. Cette quantité croîtra avec la masse des électrons mis en jeu.

La *capacité calorifique* représente la quantité d'*énergie de pulsation et de translation* que la matière est susceptible d'emmagasiner. Cette quantité dépendra à la fois de la masse des électrons et de l'énergie de dilatation absorbée par ces pulsations.

La *conductibilité calorifique* représentera la quantité d'énergie de pulsation induite de tranche en tranche; elle sera également une fonction de la masse des électrons pulsants.

Il est encore impossible, dans l'état actuel de nos connaissances, de définir le rapport exact qui doit unir ces trois ordres de grandeurs; tout ce que l'on peut affirmer, c'est qu'elles sont toutes trois fonction de la masse des électrons.

Constatons dès à présent que, de tous les liquides, c'est l'eau qui a à la fois la plus grande capacité électrique, la plus grande capacité calorifique et la plus grande conductibilité calorifique.

Il est également intéressant de remarquer que si l'on compare les divers termes de la série des alcools, on trouve pour la conductibilité et la constante diélectrique les nombres suivants, qui varient à peu près dans le même rapport :

	Constante diélectrique.		Conductibilité calorique.	
	—		—	
Eau	85.0	1.00	0.14	1.00
Alcool méthylique. .	32.6	0.38	0.049	0.35
Alcool éthylique . .	27.0	0.31	0.049	0.35
Alcool propylique. .	22.8	0.26	0.037	0.26
Alcool amylique . .	15.9	0.18	0.034	0.24

La loi de Maxwell et les relations que nous venons d'indiquer ne peuvent présenter le caractère de précision de celle que nous avons indiquée tout d'abord.

Les grandeurs mises en jeu ne dépendent, en effet, pas seulement de la densité moyenne de l'éther ou des électrons, mais

aussi de leur disposition et de la masse de ceux-ci considérée individuellement. Ces relations nous indiquent simplement que nous sommes sur la trace de la vérité, mais beaucoup de connaissances nous manquent pour les compléter.

§ 3. — *Électrisation produite par la variation de température des cristaux.*

Nous avons vu que le diélectrique, à l'opposé du conducteur, doit être considéré comme formé par une série de molécules isolées les unes des autres et renfermant elles-mêmes des ions orientés suivant certaines directions. Si ces molécules sont elles-mêmes orientées, on obtient le cristal.

L'image d'une substance cristalline diélectrique serait ainsi représentée par la figure 5.

Remarquons d'abord que dans cet état les charges superficielles ne peuvent devenir apparentes, celles-ci se comportant absolument comme des charges a et b (fig. 6) obtenues par influence à l'aide d'un conducteur central A, portant deux charges de noms contraires. Des charges développées en a', b' et éliminées ne renaîtront pas.

Mais si l'on vient à augmenter la température, il se produit un accroissement de tension; dès lors, il apparaîtra en b' une charge négative et en a' une charge positive. Lorsque la température s'abaisse, l'action se produira en sens contraire.

Tel est le phénomène qui se manifeste notamment pour la tourmaline.

Il résulte de cette conception de l'état cristallin que la cristallisation d'une substance aura nécessairement pour résultat de développer de l'électricité. Il en est ainsi notamment du soufre, de l'acide arsénique et d'autres substances.

Nous voyons également le parti que l'on pourra tirer de ces considérations dans l'étude de la propagation de la lumière. Le rayon extraordinaire paraît devoir ses propriétés anormales à ce que le plan de vibration correspond avec l'orientation des ions.

La réfraction normale serait donc simplement due à l'accroissement de densité de l'éther dans les milieux transparents. L'action de l'électron n'interviendrait que pour modifier les lois normales. Au contraire, la capacité électrique dépend des électrons mis en jeu. Telle est vraisemblablement la cause des nombreuses anomalies de la loi de Maxwell.

Remarquons encore que le développement d'électricité par suite d'une variation de température constitue la meilleure preuve de l'accroissement de vitesse angulaire du tourbillon, c'est-à-dire de tension électrique, lorsque la température s'élève.

Au zéro absolu, le tube tourbillon correspondant à une série ionique aura atteint son maximum de diamètre, l'orientation électrique sera réduite à zéro et il en sera de même des vibrations calorifiques correspondant aux tensions qui caractérisent les diverses températures.

CHAPITRE VI.

Oscillations de l'éther, action du champ magnétique et suite de la radioactivité.

Il est actuellement établi que la transmission des diverses radiations du spectre dans l'éther est caractérisée par des oscillations normales au sens de la propagation, de même que la vague se transmet à la surface d'un liquide. Cependant, il ne semble jamais être venu à l'esprit du physicien de se demander si la *forme* de la vague lumineuse n'est pas susceptible de variations. La vague qui déferle sur la côte n'affecte pas la même forme que la vague du large, la longueur d'onde étant du reste supposée la même. Ne peut-il en être de même pour la vague lumineuse? Depuis de nombreuses années, cette hypothèse nous avait semblé vraisemblable; elle est maintenant la conséquence de notre hypothèse sur la forme de l'ion, mais aucun fait ne se présentait à notre esprit afin de l'établir ou tout au moins afin de la corroborer, lorsque tout dernièrement un travail magistral du Dr Gustave le Bon est venu jeter une vive lueur sur l'état de la question.

Ainsi que nous l'avons admis précédemment, l'ion serait composé (dans sa conception la plus simple) d'un élément matériel rectiligne, le bâtonnet, à chacune des extrémités duquel se rencontrent les électrons; plans, si la tension est nulle; coniques, si la tension existe. Partant de cette hypothèse, il est facile de voir que la forme de la vague éthérée dépendra du potentiel de l'élément envisagé.

Considérons d'abord l'électron a (fig. 1) à tension moyenne nulle dont l'amplitude de l'oscillation est représentée par l'angle α. Toutes choses étant égales de part et d'autre, cet électron développera dans l'éther des oscillations transversales parfaitement régulières, comme l'indique la figure, si nous considérons une direction normale au bâtonnet. Si, au contraire, nous

considérons une direction parallèle au bâtonnet, les ondes réalisées seront longitudinales. Enfin, dans une position intermédiaire, nous réaliserons la superposition des deux systèmes. On sait que la lumière est due aux oscillations transversales, mais on ignore à quel phénomène correspondent les oscillations longitudinales.

Lorsque les ions constituent une chaîne fermée, le cas du courant fermé, où les dispositions moléculaires spéciales correspondent à la figure 2, la radiation à oscillations longitudinales O′ (fig. 1) ne peut se produire.

L'oscillation longitudinale des ions est alors, comme nous l'avons dit précédemment, utilisée à développer les actions répulsives du calorique. Si, au contraire, la chaine est ouverte, l'oscillation O′ se développera librement dans l'éther ambiant. Tel serait le mécanisme de la production de certaines émanations développées par la radioactivité *non déviables par l'aimant.*

Par quel moyen pourra-t-on faire apparaître ces vibrations longitudinales? La première pensée qui vient à l'esprit est de s'adresser aux gaz. Mais dans leur état normal, ils ne sont pas ionisés, leurs molécules constituent des chaînes fermées. Pour voir apparaître le phénomène, il suffit de les ouvrir, de les ioniser. Le Dr Gustave le Bon a démontré par l'expérience que les gaz ionisés par la flamme émettent des radiations capables de traverser des lames d'aluminium et de décharger des corps électrisés.

Si l'on détermine le passage du courant dans un gaz raréfié et par conséquent ionisé, les ions s'orientent parallèlement les uns aux autres, la chaîne est fermée, puisqu'il en est ainsi du courant, et les oscillations transversales apparaissent seules.

Il en est ainsi dans le gaz devenu luminescent. Pour qu'il en soit autrement, il suffit de faire en sorte que le chemin moyen des ions soit supérieur à la longueur du tube. Dans ces conditions, l'électron *a* rencontrera la surface anticathodique A B, ainsi que l'indique la figure 3, et l'oscillation longitudinale se propagera librement dans l'espace E, ou suivant une direction différente après répercussion sur l'anticathode. Telle est vraisemblablement l'interprétation qu'il faut donner aux rayons X.

Cette interprétation est conforme à l'observation de M. Blondlot, qui trouve que la vitesse de propagation est égale à celle de la lumière.

Mais cette explication s'applique encore plus spécialement aux substances radioactives dont les ions libérés constituent des chaînes brisées (courants ouverts).

Lorsqu'il s'agit de la production des rayons X dans les tubes à vide, à l'action que nous venons d'indiquer il doit s'en ajouter une autre, probablement plus intense.

Nos précédents travaux tendent à montrer que le rayon cathodique est un courant en partie simple (chaîne ouverte, courant ouvert), pour lequel le chemin de libre parcours des ions correspond au moins à la distance qui sépare la cathode de l'anticathode B (fig. 4). D'autre part, nous avons montré que l'orientation positive du cône électron déterminait une compression de l'éther, que l'orientation négative déterminait une dépression. Cette remarque nous permet de reconnaître que le rayon cathodique est le siège d'une série de compressions et de dépressions de l'éther qui se succèdent rapidement par suite du mouvement des ions. En d'autres termes, nous voyons se produire dans l'éther l'analogue du phénomène du son, du sifflement du projectile dans l'air, dont l'avant est soumis à une compression, l'arrière à une dépression. Cette oscillation s'échappera de l'anticathode B, de même que le son s'échappera de l'ouverture du tube où on le produit, et il en est encore ainsi par cela que, par l'artifice mis en jeu dans les tubes à vide, *le courant est ouvert.* Si le courant était fermé, les choses se passeraient comme si l'on pouvait déterminer l'oscillation sonore dans un tube circulaire fermé. Ces oscillations ne se transmettraient pas au milieu ambiant et resteraient toujours cachées.

Nous avons supposé, dans la figure 1, que la tension de l'électron était nulle. Mais il n'en est pas toujours ainsi; il est même peu vraisemblable qu'il existe dans la nature des corps absolument neutres, dénués de tout pouvoir réactionnel. L'or, dont les combinaisons sont instables, se rapproche du type que nous avons représenté; mais des corps tels que l'aluminium, le

sodium, etc., dont les combinaisons sont très stables, possèdent des électrons dont la tension est relativement considérable.

Si nous considérons une radiation se propageant dans le sens de la flèche (fig. 5), celle-ci participera à la fois au type de l'oscillation longitudinale et au type de l'oscillation transversale.

On pourrait la considérer comme étant formée par la superposition des deux oscillations.

Une onde de cette forme participera également à la fois aux propriétés des rayons X et des rayons ordinaires.

L'une des propriétés fondamentales des rayons X consiste à décharger les conducteurs électrisés, soit en ionisant la surface du conducteur lui-même, soit en ionisant l'atmosphère ambiante. On devra donc s'attendre à retrouver ce caractère d'une manière d'autant plus marquée que le rayon se rapproche davantage de l'oscillation longitudinale, que la tension de l'électron mis en jeu est plus marquée, que l'angle β est plus petit. L'ion *or* vibrant possédera à un moindre degré que l'ion aluminium la propriété de décharge. Les combinaisons de ce dernier métal sont, en effet, bien stables, contrairement à celles de l'or.

Le Dr Gustave le Bon vient de mettre cette déduction de la théorie en évidence en faisant jaillir l'étincelle entre des électrodes d'or et d'aluminium. La composition spectroscopique et l'intensité de la lumière étant les mêmes, ce savant trouve que la décharge produite par l'or est environ trois fois plus faible que celle produite par l'aluminium.

Considérons maintenant une surface métallique soumise à l'action d'une radiation transversale, de préférence une radiation ultra-violette.

Il semble que dans ces conditions la radioactivité développée est étroitement unie au phénomène de la dispersion anormale. On sait, en effet, que les vibrations des ions soumis à la radiation ne parviennent pas à devenir aussi rapides que les vibrations du rayon lui-même. Il en résulte qu'une partie de l'énergie de celui-ci est employée à ioniser la matière et, par conséquent, à modifier la forme de l'onde en introduisant des composantes longitudinales.

Cette modification de forme pourra avoir pour effet de la rendre plus pénétrante dans les métaux, en établissant l'oscillation intermédiaire entre le rayon X et le rayon normal.

Dès 1882, M. de Chardonnet avait remarqué que l'on peut photographier l'arc électrique en quelques secondes au travers des miroirs argentés complètement opaques. Nous avons également constaté une action photographique de l'étincelle au travers de lames d'or, à peu près opaques pour la lumière, alors que cette action était incomparablement plus faible en utilisant des verres verts parfaitement transparents en apparence.

Supposons, en effet, que l'on vienne à superposer des oscillations longitudinales aux oscillations transversales, que nous représenterons toutes deux en pointillé (fig. 6). Le fluide soumis à la résultante de ces deux mouvements sera parcouru par une onde telle que celle représentée en traits pleins.

MM. Hagen et Rubens ont constaté, pendant le courant de cette année, que l'argent présentait un minimum d'absorption dans l'ultra-violet. C'est à cette circonstance que l'on doit attribuer le phénomène observé par de Chardonnet; mais pour l'or, le phénomène se passe, d'après ces physiciens, dans le vert, c'est-à-dire dans la région visible. Or, à intensité lumineuse égale, cette même région est, comme nous le disons, plus actinique lorsqu'elle a traversé une couche d'or que lorsqu'elle a traversé une lame de verre de même couleur.

Disons enfin que M. Blondlot vient de montrer que les tubes à rayons X émettent une espèce de radiation à vibrations transversales. Ces rayons traversent des milieux opaques, n'impressionnent pas les plaques photographiques, mais activent l'étincelle lorsque le plan de polarisation est perpendiculaire aux plans qui renferment la direction de l'étincelle; de plus, ils se réfractent.

En résumé, nous pouvons concevoir théoriquement le passage progressif du rayon X au rayon à oscillations transversales.

Il est également curieux de remarquer que cette dernière oscillation correspond à l'oscillation électromagnétique, alors

que la première correspond à l'oscillation électrostatique. Or M. Turpain a réalisé des oscillations de cette espèce de grande longueur d'onde, et il a remarqué que cette longueur d'onde est indépendante du milieu dans lequel on la produit. Elle ne se réfracterait donc pas de même que les rayons X.

L'ensemble des observations faites dans ces derniers temps par les physiciens ne permet plus de douter que les rayons X correspondent à des oscillations longitudinales. En effet, d'une part le fait que la vitesse de propagation est égale à la vitesse de la lumière, d'autre part l'existence du phénomène de la diffraction, nous autorisent à admettre que ce phénomène correspond à un mouvement oscillatoire de l'éther. Mais, comme le fait remarquer le Dr Gustave le Bon, cette oscillation ne correspond pas à l'oscillation lumineuse, car l'ultra-violet devient de moins en moins pénétrant à mesure qu'on s'avance dans le spectre. Nous nous trouvons maintenant en mesure de mettre en regard deux observations de la plus haute importance. MM. Haga et Wind montrent, en se basant sur le phénomène de la diffraction, que la longueur d'onde des rayons X est de l'ordre des 0.10 $\mu\mu$. Or, Schumann a reconnu que le spectre s'étend jusqu'à cette longueur d'onde, et non seulement ces rayons se réfractent, mais ils sont encore absorbables à un tel point que ce physicien s'est vu forcé de faire le vide dans le spectroscope pour les reconnaître. Ces faits sont décisifs : puisque les rayons X correspondent à des oscillations qui ne peuvent être transversales, elles sont longitudinales.

Trois hypothèses avaient été proposées afin d'interpréter les rayons X : 1° oscillations longitudinales de l'éther; 2° oscillations transversales; 3° projections de l'éther (la nôtre). C'est la première hypothèse qui prévaut; les projections ne s'appliquent qu'aux ions, c'est-à-dire aux rayons cathodiques et à leur congénères des substances radioactives.

Nous voyons que si la chaîne élémentaire est fermée (si le courant est fermé, atome vortex de Thomson), il y aura apparition de radiations lumineuses; si elle s'ouvre, une grande partie au moins de l'énergie sera employée à développer la radio-

activité. C'est là ce que nous avons reconnu dans un précédent travail. Si l'on introduit dans la flamme ou dans l'étincelle des sels qui provoquent la luminescence, la radioactivité diminue.

Puisque la lumière dans les corps luminescents est due à des courants fermés, il est facile de voir ce qui va se passer si l'on soumet ces corps à une action électromagnétique. Nous allons voir que le phénomène de Zeeman est la conséquence évidente de notre théorie.

Supposons qu'un élément soit constitué par des chaînes circulaires fermées dont les mouvements de rotation peuvent du reste indistinctement se produire dans le sens de la flèche, ou en sens contraire, ou dans un plan quelconque (fig. 7). Si ces éléments sont placés entre les pôles d'un électro-aimant, ces courants élémentaires s'orienteront parallèlement au courant aimant. Le mouvement oscillatoire des électrons constitutifs se combinera avec le mouvement de rotation du système, de telle manière que le rayon perçu normalement à la figure, c'est-à-dire suivant la direction des lignes de force, sera polarisé circulairement. Si, au contraire, le rayon est émis dans le plan de la figure, c'est-à-dire normalement aux lignes de force, le rayon sera polarisé rectilignement et la longueur d'onde sera la même que celle des rayons polarisés circulairement, ce que l'expérience démontre.

Le dédoublement des raies peut s'interpréter de la manière suivante. Lorsque l'action magnétique n'agit pas, on peut concevoir que des courants tels que celui que nous avons représenté figure 8 circulent dans tous les azimuts. Lorsque l'aimant agit, tous ces courants tendent à s'orienter dans un même plan, normalement aux lignes de force, de telle manière que le *sens nominal* de ces courants devienne parallèle au courant aimant, le *sens du mouvement des ions* pouvant s'exécuter dans l'une ou l'autre direction. Ces courants emboîtés fourniront l'image d'une série de circonférences concentriques. La figure représente deux courants concentriques de *même sens*, dont le mouvement des ions s'exécute en *sens contraires* (ce qui se passe dans le courant normal).

Nous pouvons admettre maintenant que chacun de ces cou-

rants est caractérisé par un temps de pulsation électronique déterminé. Nous aurons ainsi l'interprétation du doublet du sodium, par exemple, dont chacune des composantes est polarisée circulairement dans deux sens contraires.

Nous pourrions évidemment supposer l'existence de groupements pour lesquels les courants se produisent en partie triple ou quadruple, et ainsi de suite, chacune des parties étant caractérisée par une raie correspondante.

Un fait du plus haut intérêt se trouve dans l'existence de vibrations parallèles aux lignes de force.

Ceci nous oblige à admettre que les directions normales aux circonférences que nous venons de considérer sont occupées par des ions. *La tension électromagnétique moyenne de ces ions doit être nulle*, ce qui n'exclut du reste pas une tension électrostatique; il n'y a plus un emboîtement des électrons (fig. 9), sans quoi ils seraient soumis au mouvement de giration déterminé par l'aimant. Or, si nous nous reportons à la figure 1, nous voyons que l'oscillation perçue est celle que nous avons représentée par la lettre *o*; nous voyons également qu'il n'existe pas d'oscillation lumineuse dans le sens des lignes de force, mais qu'il se produit une oscillation *o'* longitudinale correspondant à la production des rayons X et de ses congénères. *Donc à la raie polarisée rectilignement ne correspond plus aucun phénomène lumineux, si l'observation est faite suivant la direction des lignes de force*, ce que l'expérience démontre.

Si nous supposons que les systèmes tournants que nous avons considérés ne sont pas absolument concentriques, nous pourrons admettre autant d'axes qu'il y a de systèmes, et ayant leur période de vibration propre, ce qui fournirait l'interprétation du dédoublement de ces raies.

Ainsi que nous venons de le faire remarquer, la condition indispensable pour qu'un ion soit soumis à l'action de l'aimant se trouve dans la nécessité de l'existence d'une tension électromagnétique.

Ce caractère fait défaut aux substances dont les aptitudes réactionnelles sont difficiles à éveiller.

M. Michelson a précisément reconnu que des raies de l'azote et du carbone présentent cette insensibilité à l'action de l'aimant.

Suite de la radioactivité. — Ionisation produite par les radiations.

Lorsqu'une radiation, de préférence une radiation ultra-violette de petite longueur d'onde, vient à rencontrer un corps, celui-ci s'ionise. Afin de montrer le phénomène, il suffit de monter sur un plateau de résine électrisé par frictions d'un conducteur, un cylindre d'aluminium C (fig. 10) récemment poli au papier à l'émeri. Si l'on soumet le système aux radiations solaires non tamisées par le verre, qui retient les petites longueurs d'ondes, et si l'on saupoudre de soufre après une demi-heure de pose environ, on remarque qu'il s'est produit une plage *p*, sur laquelle s'est étendu le fluide infra-électrique qui a repoussé de toutes parts l'électricité, ainsi que la figure l'indique. La partie opposée correspondant à l'ombre n'a subi aucune altération. L'ombre du cylindre est bien marquée sur le photogramme IV.

La cause de cette ionisation est toujours la même que celle qui préside à l'ionisation des corps subissant l'électrisation par le frottement. Nous avons vu que, dans ces conditions, les électrons vibrent à l'unisson par l'action du frottement, ainsi que le feraient une série de cordes tendues dans les mêmes conditions sous l'action de l'archet. Ces vibrations concordantes déterminent l'action réciproque répulsive de Bjerckness, et l'ion *saute*. Lorsque la surface du métal que nous avons considéré est soumise aux oscillations lumineuses, des oscillations concordantes très rapides se développent à la surface du métal et le même résultat est obtenu.

Il se développe donc à la surface des conducteurs soumis à une radiation lumineuse des courants oscillatoires en tous sens, dont la fréquence est celle de l'oscillation lumineuse. Nous les désignerons sous le nom de courants à *excessive fréquence*.

Remarquons, enfin, que des substances solides *aniodyna-*

miques peuvent devenir *iodynamiques* sous l'action de certaines radiations. On sait qu'il en est ainsi du sélénium, qui devient conducteur sous l'action de la lumière.

Si les ions qui s'échappent de la matière dans ces conditions sont orientés, orientation qui pourra dépendre de la forme de l'onde, nous réaliserons le courant, et la décharge de la surface supposée électrisée se produira de préférence pour un signe déterminé.

C'est ainsi que si des ions *a* (fig. 11) s'échappent de la surface *ab* supposée électrisée négativement, il y aura décharge, et il en sera de même d'une surface *a'b'* placée dans le voisinage, électrisée positivement.

Telle est l'interprétation du fait intéressant découvert par le Dr Gustave le Bon.

Si l'orientation est quelconque, deux courants se développeront en sens contraires et la décharge se produira également pour les deux électricités. Nous pouvons enfin concevoir des cas intermédiaires où la décharge se produit de préférence pour un signe déterminé.

Faisons maintenant cette remarque importante, que si l'énergie de pulsation est employée à effectuer ce travail de projection, elle ne sera nécessairement pas employée à autre chose, c'est-à-dire à faire vibrer l'éther ambiant. Or, on constate que si l'on introduit dans une flamme ou dans une étincelle des sels ou des vapeurs métalliques volatiles, ces foyers d'ébranlement de l'éther deviennent luminescents. L'énergie de vibration éthérée augmente, l'énergie de projection ionique diminue. Par conséquent, ces foyers d'ébranlement seront moins aptes à décharger les corps électrisés.

Si l'on utilise la flamme de Bunsen, l'électroscope placé dans le voisinage se décharge. Mais si, au contraire, on vient à introduire des vapeurs métalliques dans ces milieux, la projection ionique fait place au phénomène oscillatoire, aux ondes lumineuses qui apparaissent sous forme de raies parfaitement définies, et la vitesse de décharge est notablement diminuée.

Afin de réaliser l'expérience à l'aide de flammes, il suffit de

faire passer le dard du chalumeau au travers d'un tube de fer T (fig. 12); il traverse ensuite une ouverture circulaire pratiquée dans un écran en tôle de fer E. Un électroscope est placé dans le voisinage et se décharge sous l'action du dard D. Mais si l'on vient à placer dans le tube T en *s* un sel volatil, par exemple NaCl en poudre, on remarque que la vitesse de décharge est presque complètement enrayée.

Le même phénomène se produit à l'aide de l'étincelle. Si l'on fait jaillir celle-ci à la surface de l'eau pure, ainsi que cela est indiqué figure 13, la décharge de l'électroscope se produit rapidement, mais il suffit d'ajouter un sel volatil soluble, par exemple $CaCl_2$, pour voir la décharge enrayée.

Note. — Afin de réaliser les expériences avec les plateaux de résine dont nous avons parlé, il importe que ceux-ci satisfassent à deux conditions : il faut d'abord que la surface soit capable de condenser une quantité suffisante d'électricité, et il faut ensuite que celle-ci puisse glisser avec une grande facilité sur cette surface.

Le plateau ne présente pas ces conditions lorsque après avoir été soumis aux frictions d'un conducteur à haut potentiel, la figure que l'on obtient en répandant de la poudre de soufre se compose, pour l'électricité positive, d'une série de petites étoiles ramifiées plus ou moins enchevêtrées. Il faut, au contraire, que l'on obtienne une figure continue telle que celle que nous reproduisons par la photographie, et qui représente assez bien l'image d'une feuille (photogramme V). Toutes les colophanes ne satisfont pas à cette condition; mais pour les modifier, il suffit généralement d'ajouter pendant la fusion une petite quantité de goudron végétal : 20 à 50 ‰.

En coulant une série de petits plateaux d'essai, on arrive rapidement au résultat voulu.

CHAPITRE VII.

Réflexions sur la constitution de la matière.

---

§ 1. — *Constitution de l'atome et de la molécule.*

Remarquons d'abord que l'examen spectroscopique et le phénomène de Zeeman nous obligent d'admettre que chaque atome est lui-même constitué par une série de courants fermés, à chacun desquels correspond une raie lumineuse lorsque le mouvement des ions ne subit pas de perturbations de la part du milieu ambiant. Lorsque ces perturbations existent, le spectre devient continu (solides et liquides).

D'autre part, malgré cette complication extrême, l'hypothèse doit tenir compte de la loi très simple des proportions définies et des proportions multiples.

Nous admettons que chaque *ion électrolytique* est constitué par un axe de rotation dont chaque extrémité est munie des électrons *a*, *b* (fig. 1), qui caractérisent la nature électro positive ou électro-négative de la substance. Une série de courants circulaires α, β, γ, δ, formés de *sous-ions*, pivotent autour de l'axe *ab*.

Un tel ion se confond avec l'atome lorsqu'il est mono-atomique. Si, au contraire, la substance est polyatomique, les sous-ions décrivent des courbes fermées autour des ions électrolytiques supposés, par exemple, parallèles (fig. 2). Les sous-ions décriront dans l'atome A tétra-atomique, la courbe que nous indiquons autour des ions α, β, γ, δ.

Il est impossible d'avoir une image plus exacte de la foudre globulaire, affectant ici des dimensions infinitésimales, au sujet de laquelle nous renverrons le lecteur au premier chapitre. Si

donc nous pouvions déranger l'arrangement ionique qui communique à l'atome la stabilité que nous lui connaissons, la libération de l'énergie d'orientation des électrons communiquerait à la matière la *forme* de la foudre telle qu'elle se présente si un globe fulgurant vient à faire explosion.

L'atome sera donc mono-, bi-, tri-, quadri-, penta- ou hexavalent, suivant qu'il sera formé de un, de deux, de trois, de quatre, de cinq ou de six ions. Le nombre de ses ions représente sa valence maximum.

L'atome pourra être iodynamique, c'est-à-dire que ses ions peuvent être interchangeables.

L'atome des métaux qui peuvent à la fois jouer un rôle de métal et de métalloïde, tels que Bi, Sb, As, est constitué par des ions d'une part positifs, d'autre part négatifs. Lorsque ces ions se combineront, par exemple, avec le chlore, nous obtiendrons pour chacun d'eux la représentation indiquée. De même avec l'hydrogène. L'ion de carbone dans son état normal est vraisemblablement neutre (fig. 3).

Remarquons encore qu'il peut se faire que deux valences se fondent en une seule, si elles ne possèdent que deux électrons libres *a*, *b* (fig. 1) au lieu de quatre.

Si nous faisons abstraction des courants sous-ioniques, nous pourrons donc concevoir les atomes et leurs combinaisons par l'image figure 3, chaque ion électrolytique représentant une valence.

Si un ion se sépare d'un atome, ce ne sera en général (excepté lorsqu'il est destiné à rendre le milieu ambiant iodynamique; lorsque se développe la radioactivité des gaz sous l'action d'une substance radioactive, l'ion est définitivement libéré) que pour se resouder un instant après à un système semblable; en un mot, *l'atome est iodynamique.* La quantité de chaleur absorbée ou développée par une séparation est immédiatement compensée par une quantité de chaleur équivalente lorsque la soudure se reproduit.

La confusion qui a régné entre les mots *dissocié* et *iodynamisé* constitue, comme on le sait, la principale difficulté que

rencontrait la théorie d'Arrhenius, qui semblait exiger l'absorption d'une quantité de chaleur considérable.

Si nous en revenons à la radioactivité, nous pouvons nous demander si la stabilité de l'édifice atomique est absolue, particulièrement lorsque ceux-ci possèdent de grandes masses. En un mot, l'action de la force centrifuge sur les courants sous-ioniques ne peut-elle pas devenir suffisante pour qu'un certain nombre de sous-ions s'échappent? S'il en est ainsi, ils constitueront les éléments des projections radioactives, c'est-à-dire les projections cathodiques et les rayons Becquerel, qui, d'après J.-J. Thomson, sont constitués par des éléments incomparablement plus petits que les ions électrolytiques.

Grâce à leur extrême petitesse, ces ions pourront traverser des substances métalliques sous une faible épaisseur. Nous pourrons de plus concevoir une infinité d'effets différents qui résulteront de différences de vitesse, d'orientation, de tension ou de la polarité des électrons.

On peut concevoir, enfin, que tous les ébranlements favorisent cette dislocation de l'atome, tels le passage du courant ou l'action d'une radiation. Enfin, si des ions disparaissent d'une chaîne ionique, le diamètre de celle-ci diminuera. Cette diminution aura pour résultat un accroissement de vitesse angulaire, c'est-à-dire un accroissement de température, ainsi que cela a été remarqué pour le radium.

Disons, enfin, que presque tous les métaux semblent être radioactifs, ainsi que l'a observé le Dr Gustave le Bon.

Elster et Gietel trouvèrent que si l'on porte un fil de platine à l'incandescence, celui-ci se charge négativement dans l'air et positivement dans l'hydrogène; le gaz ambiant se charge de signe contraire. Ceci paraît indiquer que l'ionisation se produit dans le gaz condensé à la surface du fil, le signe dépendant du caractère électro-chimique du gaz. L'arc électrique produit des effets semblables, ainsi que le remarque J.-J. Thomson.

Nous pouvons résumer en disant qu'une substance peut être radioactive :

1° En mettant simplement en liberté les ions de sa propre

matière ou ceux de la substance environnante sans imprimer à ces ions des vitesses initiales suffisantes pour qu'ils puissent traverser d'une manière immédiatement apparente des milieux solides. Il en est ainsi des flammes, étincelles, aigrettes, corps incandescents, etc. Cependant, le Dr Gustave le Bon a constaté la transparence de l'aluminium, même pour ces émanations.

2° En déterminant des projections initiales suffisamment accentuées pour fournir la représentation d'un faisceau doué des propriétés dont nous avons parlé, et capable lui-même d'ioniser le gaz ambiant.

Nous voyons ainsi que l'atome, qui semblait d'abord représenter la dernière limite de divisibilité naturelle de la matière, apparaît actuellement comme un édifice formé d'éléments incomparablement plus petits.

Ces éléments ne sont-ils pas eux-mêmes d'ordre supérieur par rapport à d'autres? Et ne nous acheminons-nous pas ainsi par degrés insensibles de la matière proprement dite vers l'éther ?

Bien des questions se posent encore qui se rapportent à un ordre de faits spécial, qui apparaissent comme surnaturels; tels sont les phénomènes de la vie, de la télépathie, du spiritisme, etc., qui ont probablement leur siège dans un milieu plus raffiné encore que l'éther lui-même, et qui tôt ou tard semblent devoir se rattacher au domaine de la physique.

Nous voyons qu'une combinaison ne peut s'effectuer que si la matière devient iodynamique, de manière à mettre les ions libres en présence.

C'est ainsi que s'expliquent les combinaisons produites par la lumière, par l'étincelle et à l'état naissant, ainsi que la radioactivité qui accompagne le phénomène de la combinaison, comme l'a reconnu le Dr Gustave le Bon.

Images latentes de la photographie. — Lorsqu'une substance se trouve soumise à une cause quelconque provoquant l'état iodynamique, il se peut que cette substance conserve cet état après que la cause a cessé d'agir. Il en résultera que, mise en présence de certains réactifs, elle aura acquis la faculté de subir des transformations chimiques, faculté qu'elle ne possédait pas

avant l'action iodynamisante. Les parties d'une plaque photographique exposées à la lumière sont iodynamisées et acquièrent la faculté de réagir sur le développateur, alors que les autres parties demeurent intactes.

Soudure. — Les belles recherches de M. Spring ont montré que les surfaces fraîches des métaux se soudent avec facilité par simple juxtaposition, conséquence nécessaire du mouvement ionique des surfaces en présence.

Cette soudure s'exécute, en général, avec d'autant plus de difficulté que le corps est moins conducteur. Le verre, par exemple, ne se soude pas.

Diffusion. — La diffusion dans les solides, également constatée par M. Spring, est la conséquence de l'état iodynamique; elle est très marquée dans les métaux; elle est faible ou nulle dans les diélectriques solides. C'est ainsi que si l'on soude un verre coloré à un verre qui ne l'est pas, la migration de la substance colorée ne se produit pas.

§ 2. — *Constitution des gaz, des liquides et des solides.*

Les considérations que nous venons de développer nous permettent-elles d'admettre l'hypothèse relative à la constitution des gaz telle qu'elle a été conçue par Bernouilli et Clausius, hypothèse si brillamment développée par Baltzmann dans ces derniers temps? Nous ne le pensons pas. Une particularité qui n'a pas suffisamment attiré l'attention se trouve tout à fait inexplicable si l'on admet que le gaz *sensiblement* parfait, soumis *sensiblement* à la loi de Mariotte et de Gay-Lussac, est composé de molécules, comparables à des corpuscules séparés les uns des autres et n'exerçant plus d'actions réciproques appréciables.

Puisque ces actions peuvent être considérées comme extrêmement faibles à des pressions de quelques centimètres de mercure, nous pouvons conclure que rien ne sera changé si nous poussons plus loin la raréfaction. La molécule sera toujours isolée sensiblement dans les mêmes conditions, *elle restera donc ce*

qu'elle était et rien ne se modifiera dans sa constitution. Or on sait qu'il n'en est pas ainsi : lorsque la pression devient extrêmement faible, le milieux gazeux devient iodynamique, la molécule se brise.

Tout devient, au contraire, explicable si l'on applique aux gaz la conception des tubes-tourbillons.

Concevons un gaz formé d'un grand nombre de tubes-tourbillons *ab*, *a'b'* (fig. 4), limités par la paroi du vase qui les renferme, orientés indifféremment suivant toutes les directions et constitués par la série d'ions ayant la forme que nous avons supposée.

Ces tubes ioniques sont animés d'une vitesse de rotation autour de leur axe. Lorsque deux tubes ioniques ayant des directions à peu près parallèles viennent à se heurter latéralement, ils rebondissent les uns sur les autres à peu près comme le feraient des billes élastiques animées de mouvements de rotation et qui viendraient à se rencontrer. Ce sont ces chocs latéraux qui déterminent la force expansive du gaz.

Représentons encore par v la vitesse d'un ion normale à l'axe d'un tube-tourbillon, par m sa masse, par mv la quantité de mouvement. La pression exercée sur la paroi du vase sera proportionnelle à $mv \times N$, N représentant le nombre de chocs, ou encore, si n représente le nombre des ions renfermés dans le vase, on aura, en suivant toujours le raisonnement classique,

$$P = nmv^2 \times \text{const.}$$

Remarquons encore que la vitesse v est proportionnelle à la vitesse de rotation de l'ion et que, dès lors, la température absolue est proportionnelle au carré de la vitesse de rotation de l'ion.

D'autre part, la section ou la surface de la projection s de l'électron est inversement proportionnelle à la force électromotrice (fig. 5).

Nous aurons donc

$$T = mv^r \times \text{const} = m\frac{1}{s^2} \times \text{const} = mE^2 \times \text{const.}$$

La température absolue sera donc proportionnelle au carré de la tension des électrons.

Chaque tube ionique *ab* est soumis à une tension dans le sens de la longueur à laquelle correspond la pression interne, qui tend à rapprocher les deux parois opposées. Et cela pour la même raison que deux surfaces électrisées de signes contraires s'attirent. Cette pression sera directement proportionnelle à la force électromotrice.

La pression exercée par un gaz imparfait sera donc représentée par l'équation

$$P_i = AE^2 - BE,$$

ou

$$P_i = MT - N\sqrt{T}.$$

Cette relation ne tient évidemment pas compte de la variation de distance des ions, qui détermine une diminution de la pression interne lorsque la température s'élève.

Cette équation représente les variations de pression avec la température, le volume étant constant.

Rapprochons-la de l'équation de Van der Waals :

$$\left(P + \frac{\Pi}{V^2}\right)(V - v) = AT,$$

ou

$$P = \frac{AT}{V - v} - \frac{\Pi}{V^2}.$$

Si nous supposons v constant, ce qui n'est pas absolument exact, car dans l'ancienne théorie les molécules se dilatent, et dans celle que nous proposons les tubes-tourbillons s'allongent, nous pouvons encore écrire

$$P = CT - D\Pi,$$

C et D représentant des constantes.

Nous voyons donc que la valeur de Π croîtrait proportionnellement à la $\sqrt{\ }$ de la température absolue si l'on ne tenait pas compte de l'allongement du tube-tourbillon.

Voici quelques valeurs de n pour CO_2 que nous extrayons d'un travail précédent (1) :

Température.	Valeur de π
258.	0,00529
198.	0,00500
100.	0,00517
60.	0,00527
40.	0,00535
30.	0,00536

Ces résultats sont évidemment encore insuffisants, mais cependant l'accroissement de π semble se manifester entre 198° et 258°, malgré l'accroissement de distance des éléments ioniques.

Dans les cas des gaz polyatomiques, le tube-tourbillon devrait être assimilable à une corde formée de plusieurs brins tordus.

Si la raréfaction atteint une certaine limite, les chaînes ioniques a, b, a′, b′ *se brisent et les ions* α *deviennent indépendants les uns des autres. A partir de ce moment, le gaz devient iodynamique et conducteur de l'électricité.* Ainsi se trouve réalisé l'état radiant de Crookes.

Il est curieux de remarquer que dans cet état ce gaz particulier correspond à la conception de Bernouilli et de Clausius.

Il est vraisemblable que dans l'état liquide les chaînes se ferment pour constituer des molécules annulaires, alors que la surface de ces corps est enveloppée par des filaments gyrostatiques, tels que *ab*, *a′b′*, et qui déterminent la tension superficielle. Dans l'état solide, ces filaments s'orientent suivant les directions qui correspondent aux faces cristallines.

Il est encore aisé de concevoir que la tension superficielle doit être une fonction de la force électromotrice, propriété qui a été mise en usage dans l'électromètre capillaire de Lipmann.

Nous voyons également qu'un accroissement de température détermine, d'une part, un allongement du tube tourbillon et, d'autre part, une diminution de diamètre.

(1) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* 1894, t. XXVIII, p. 46.

Si donc nous concevons une série de ces tubes orientés suivant la même direction, l'accroissement de température pourra déterminer une contraction normalement à l'axe des tourbillons et un allongement dans une direction perpendiculaire. Tel est le phénomène qui s'observe pour certains cristaux qui se dilatent dans la direction de leur axe cristallographique et se contractent suivant une direction normale à cet axe.

Si nous concevons les molécules liquidogéniques comme des vortex annulaires, nous voyons également le diamètre de ceux-ci diminuer à mesure que s'accroît la vitesse de giration ou la température. Telle serait la raison de la dilatation négative de l'eau, les liquides ne se dilatant en général que par suite d'une variation de constitution, c'est-à-dire d'une variation de masse des vortex.

L'eau est donc physiquement plus stable que les autres liquides, conclusion qui est en parfait accord avec ce fait que lorsque ce liquide subit une variation de pression, il prend instantanément le volume qui lui correspond.

CHAPITRE VIII.

Applications aux phénomènes astronomiques et météorologiques.

Rien n'est plus hypothétique que l'interprétation de cet ordre de phénomènes, qui sont difficilement comparables à ceux qui se produisent dans un laboratoire.

Afin de faire une comparaison vulgaire, rappelons la différence de résultats que le chimiste obtient généralement s'il opère en petit et si ensuite il veut appliquer ses résultats à l'industrie. Cette différence est incomparablement plus grande dans le domaine que nous examinons. Aussi a-t-on vu de tous temps apparaître des théories plus ou moins étranges, admises on ne sait trop pourquoi. Peut-être uniquement par vénération du nom de leur auteur.

Électricité atmosphérique. — L'origine de l'électricité atmosphérique est actuellement inconnue; l'évaporation à la surface des mers ne paraît pas devoir en donner une explication suffisante, mais il est plus probable qu'elle est le résultat du frottement des couches d'air en mouvement, tant à la surface des terres qu'à la surface des eaux.

Les régions tropicales, qui sont le siège de vents réguliers, semblent dès lors tout indiquées pour la production de l'électricité qui correspondrait à ce développement de phénomènes orageux, qui, comme on le sait, deviennent de moins en moins fréquents à mesure qu'on s'approche des pôles. Les mouvements tournants de l'atmosphère qui s'observent dans ces régions correspondent du reste avec le caractère fondamental du phénomène électrique.

En résumé, le globe terrestre avec son atmosphère frottante se comporterait comme une simple machine à frottement, l'atmosphère s'électrisant en général positivement et la terre négativement.

Mais à mesure que l'on s'écarte de l'équateur, la cause qui détermine l'électrisation disparaît et la reconstitution tend à se

produire au travers des couches atmosphériques. Lorsque ce phénomène a lieu à une grande hauteur, la raréfaction devient suffisante pour obtenir la luminescence qui s'observe dans les tubes à vide, laquelle a été désignée sous le nom d'aurore polaire.

Remarquons que les phénomènes d'ionisation de l'atmosphère joueront ici un rôle important. La reconstitution sous forme d'aurore se fera d'autant plus aisément que l'air est plus ionisé, c'est-à-dire dans des régions d'autant plus rapprochées de l'équateur. Si l'ionisation est faible, ce phénomène se produira plus difficilement et l'on observera les aurores dans des régions plus rapprochées des pôles.

Or, lorsque le Soleil présente son maximum d'activité, on peut admettre que les radiations émises sont plus favorables à l'ionisation, que, par conséquent, les aurores apparaîtront dans des régions relativement éloignées des pôles, et que l'inverse aura lieu pendant la période de minimum d'activité solaire.

Les phénomènes d'ionisation de l'atmosphère semblent du reste exercer un rôle assez important dans la nature.

Nous avons remarqué que les orages sont toujours annoncés par une forte ionisation. Les conducteurs électrisés perdent rapidement leur charge sans que l'état hygrométrique intervienne d'une manière appréciable. Lorsque l'orage s'est apaisé, les machines électrostatiques à frottement (celle que nous avons observée) reprennent lentement leur fonctionnement primitif.

Ce sont là sans doute des phénomènes qui agissent d'une manière sensible sur la nature animée.

Magnétisme terrestre. — Ce phénomène semble devoir s'interpréter en admettant que les diverses couches concentriques qui constituent le globe terrestre n'ont pas la même vitesse angulaire autour de l'axe de rotation. Or, s'il en est ainsi, deux couches successives frottantes auront nécessairement pour résultat de développer l'orientation correspondant au courant, ainsi que cela résulte du phénomène de l'induction monométallique dont nous avons parlé. La partie centrale du globe terrestre se comporterait à peu près comme le barreau d'acier qui s'aimante sur le tour en subissant l'action de l'outil.

Si nous supposons que l'axe de rotation du noyau qui s'aimante ne coïncide pas avec l'axe de la masse périphérique, on se rendra aisément compte de l'absence de coïncidence du pôle géodésique avec le pôle magnétique ainsi que de la rotation lente que ce dernier exécute autour du premier.

On peut se demander comment il est possible qu'un noyau à si haute température puisse s'aimanter, alors que le fer perd sa propriété magnétique vers 700°. Mais nous rappellerons ainsi que nous l'avons dit dans notre traité « La Chaleur », que la température de demi-fusion qui correspond à cette transformation doit se trouver singulièrement retardée par l'action de la pression.

Production des « Novae » et périodicité de l'activité solaire.

Nous avons vu que l'atome, comparable à la foudre globulaire, devait être considéré comme un édifice renfermant d'énormes quantités d'énergie dont certaines substances radioactives (le radium) manifestent la puissance par un dégagement continu de chaleur. Et nous pouvons nous demander si l'équilibre atomique conserve sa stabilité lorsque la matière est soumise aux pressions formidables qui doivent régner au sein des corps célestes. En style de mécanicien, les électrons ne finissent-ils pas par *gripper?* S'il en était ainsi, le pouvoir explosif qui en résulterait serait tel, que ce que nous connaissons de ces phénomènes ne peut fournir qu'une image tout à fait insignifiante. La matière retournerait à une de ses phases intermédiaires entre l'éther et l'état que nous lui connaissons. Les vitesses de projection pourront être égales et supérieures à la vitesse de la lumière. Si donc une étoile, par suite de la pression croissante qui résulte de sa condensation, est amenée à cet état d'instabilité atomique, on peut s'attendre à voir se produire les phénomènes d'apparitions d'étoiles nouvelles, à l'explosion de ces corps célestes.

La chaleur solaire ne doit-elle pas, au moins en partie, son

entretien à une cause semblable à celle du dégagement de chaleur de notre substance radioactive?

Ne peut-on pas admettre que de semblables manifestations se développent au sein de la masse solaire, causées par les pressions formidables qui y sont exercées?

Prenons la masse solaire dans un état d'accalmie. Le globe rayonne et perd de grandes quantités de chaleur; mais alors une contraction de la masse survient, les ions se rapprochent jusqu'au moment où le phénomène auquel nous venons de faire allusion est provoqué dans une certaine mesure, d'où production de taches et de protubérances, projections formidables, atteignant des vitesses excessives et fournissant le spectre électrique que Stas a observé.

Mais la chaleur ainsi développée ne tardera pas à écarter les ions à une distance telle que la conflagration prendra fin, que le grippement cessera. La période d'accalmie réapparaîtra, puis sera de nouveau suivie de la période éruptive.

Il est, de plus, évident que des frictions résultant de la différence de vitesse des masses en mouvement ne feront qu'activer le phénomène. Nous aurions ainsi l'explication d'une activité plus grande à l'équateur solaire que vers les pôles.

Supposons qu'à un moment donné certaines couches soient soumises à une pression et à une température convenables pour amener une déflagration. Les chocs qui en résultent ne tarderont pas à développer des pressions instantanées dans d'autres parties de la masse, qui, elles aussi, détermineront le même résultat; cette phase sera relativement rapide. Puis la période active diminuera peu à peu : phase de refroidissement relativement longue, destinée à ramener les mêmes phénomènes.

Les choses se passeront à peu près comme si un brasier, après s'être allumé rapidement, s'éteignait insensiblement.

Un travail très étendu de M. Simon Newcomb [1] nous apprend que la période du relèvement de la courbe d'activité solaire correspond à 4.62 ans, alors que la période d'abaissement correspond à 6.51 ans.

[1] *Astrophysical Journal*, janvier 1902.

Cependant, les choses en resteront-elles toujours là? Malgré ces fluctuations, la condensation du globe solaire s'accentuera de plus en plus, tout en favorisant la production des déflagrations dont nous venons de parler, et un moment pourra arriver où une grande partie de la matière du globe prendra part au phénomène et déterminera la catastrophe finale. Les éléments qui constituaient le Soleil seront alors projetés en tous sens avec la vitesse de l'éclair, comparable du reste à la vitesse de la lumière, et l'état nébulaire constituera ainsi la dernière phase de notre système.

Toute la matière solaire n'ayant pas nécessairement pris part au phénomène, une succession de maxima et de minima d'activité pourront encore se manifester et donner ainsi le spectacle que nous présentent les *Novae*.

En résumé, on peut conclure que tous les globes présentant une masse suffisante sont exposés à cette catastrophe. Mais la température à laquelle le phénomène aura lieu sera d'autant plus basse que la pression sera plus faible, que la masse de l'astre sera plus petite, car l'abaissement de température et l'accroissement de pression tendent à produire le même résultat.

L'état fragmentaire des uranolithes nous apparaît maintenant comme un corollaire de ce que nous venons de dire; l'explosion se produisant au sein d'une planète déjà refroidie à sa surface, projettera les fragments solides à des distances telles qu'ils cesseront d'être dans le rayon de la sphère d'activité sensible de la masse primitive.

Ne pourrait-on attribuer à une semblable cause la production des petites planètes? Une hypothèse semblable a déjà été faite, mais c'est à la mécanique céleste à résoudre la question de savoir si cette hypothèse ne soulève pas quelque difficulté, ou bien si la planète primitive a pu se comporter après la catastrophe ainsi que le fait la comète Biela, qui égrène pour ainsi dire sa matière le long de son orbite.

CONCLUSION

Notre but a été de tâcher d'établir un canevas de la théorie mécanique de l'électricité, de même qu'il existe un canevas de la théorie de la lumière.

Pour ce dernier agent, cette base peut se formuler en disant que *l'impression lumineuse est déterminée par une vibration;* cela est intéressant pour *tout le monde.* Mais on peut broder sur ce canevas bien des théories; à en croire les analystes, elles seraient même en nombre infini!

De même pour ce qui concerne l'électricité, le canevas est représenté par la proposition : *L'élément matériel est constitué par un système gyrostatique aspirant et foulant, l'aspiration correspondant à la manifestation électrique négative, le refoulement à la manifestation électrique positive.*

Sur celui-ci, il sera possible d'exécuter des broderies beaucoup plus fines et plus artistiques que celle représentée par cette première ébauche que nous soumettons en ce moment au public.

Plusieurs points de ces développements devront, sans aucun doute, subir des modifications, le processus de l'établissement d'une théorie par voie de synthèse étant complètement différent du processus de l'établissement d'une théorie purement mathématique. Ce n'est que progressivement que les premières se rapprochent de la vérité, à l'opposé des secondes. L'exemple le

plus frappant de cette vérité se trouve dans l'évolution des théories atomistiques de la chimie, qui ne présentent pas seulement une portée philosophique, mais qui ont aussi contribué largement à l'accroissement du bien-être matériel de ceux qui ne leur ont pas opposé un scepticisme outré. Nous avons la conviction profonde que l'électricité n'est pas une entité, et que la base que nous proposons est aussi inéluctable pour ce qui concerne la théorie de cet agent que l'idée de la vibration est inéluctable pour ce qui concerne la théorie de la lumière.

L'électricité, qu'elle soit positive, neutre ou négative, est un fluide dont la quantité a pour mesure le nombre d'électrons qu'il renferme.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

AVANT-PROPOS 3

INTRODUCTION 5

CHAPITRE PREMIER.

Phénomènes dits électrostatiques.

§ 1. Hypothèses 11
§ 2. L'électrisation par friction. 13
§ 3. L'électrisation par contact. 14
§ 4. Champ électrostatique 15
§ 5. L'influence électrostatique. 16
§ 6. L'induction électrostatique. 18
§ 7. Le courant. 24
§ 8. Machines électriques 24
§ 9. Les diélectriques ou les substances aniodynamiques. . . . 28
§ 10. Les conducteurs ou les substances iodynamiques. 29
§ 11. Le phénomène de l'influence dans les diélectriques 31
§ 12. Justification des hypothèses fondamentales 32
§ 13. Particularités de l'étincelle et figures électriques. 37

CHAPITRE II.

Phénomènes électromagnétiques.

§ 1. Le courant. 41
§ 2. Force d'entraînement longitudinale d'un conducteur parcouru par un courant 43
§ 3. Force électromotrice, intensité, résistance. 44
§ 4. Production des courants par contact, ou les courants thermo-électriques. 46
§ 5. L'induction électromagnétique. 47
§ 6. Magnétisme et diamagnétisme 50
§ 7. Perméabilité magnétique 51

Pages.

§ 8. Origine des attractions et des répulsions électromagnétiques . 52
§ 9. Perméabilité électrostatique et électromagnétique 54
§ 10. Production des courants par induction. 55
§ 11. Induction monométallique. 56
§ 12. Courants de convexion. 59
§ 13. Les oscillations électriques 61

CHAPITRE III.

La radioactivité et l'infra-électricité.

§ 1. Définition de la radioactivité 71
§ 2. Influence du raccordement du champ sur la vitesse de décharge. 72
§ 3. Diverses sources radioactives 72
§ 4. L'infra-électricité 73
§ 5. L'asymétrie des pôles. 85

CHAPITRE IV.

Les rayons dits cathodiques et l'électrolyse.

§ 1. Nature des rayons cathodiques. 86
§ 2. Forme du courant rendue directement visible. Cause de la production des rayons cathodiques. Propriétés diverses . . 88
§ 3. L'électrolyse 97

CHAPITRE V.

Les courants à extrême fréquence ou les courants calorifiques.

§ 1. Introduction à la théorie électromagnétique du calorique . . 103
§ 2. La conductibilité calorifique, le pouvoir absorbant et la couleur des corps. 111
§ 3. Électrisation produite par la variation de température des cristaux 117

CHAPITRE VI.

Oscillations de l'éther, action du champ magnétique et suite de la radioactivité 119
Suite de la radioactivité. — Ionisation produite par les radiations 127

CHAPITRE VII.

Réflexions sur la constitution de la matière.

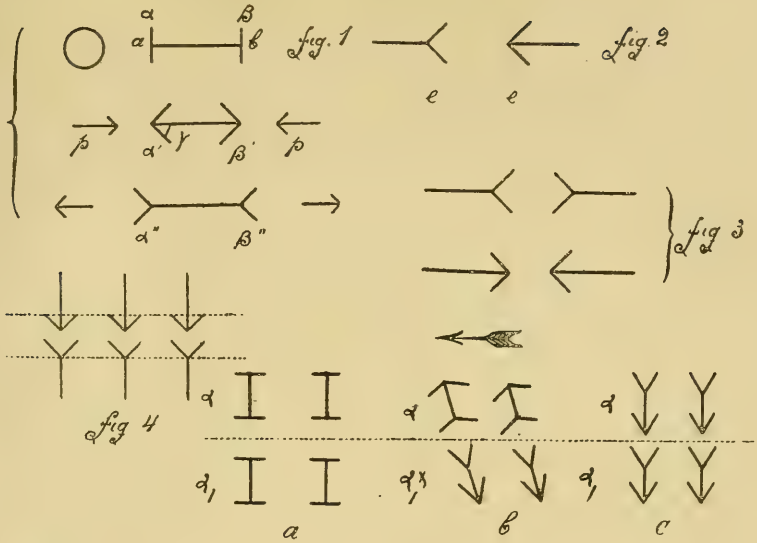
Pages.

§ 1. Constitution de l'atome et de la molécule 131
§ 2. Constitution des gaz des liquides et des solides. 135

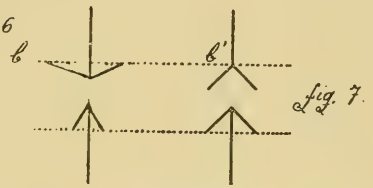
CHAPITRE VIII.

Applications aux phénomènes astronomiques et météorologiques 141
Production des « Novae » et périodicité de l'activité solaire 143

Conclusion 147


α
β
a
b
fig. 1
fig. 2
e
e
p
α'
γ
β'
p
α''
β''
fig 3
fig 4
a
a
a
a,
a,
a,
a
b
c

c b
b'
Na a
fig 6
fig. 5


b
b'
fig. 7

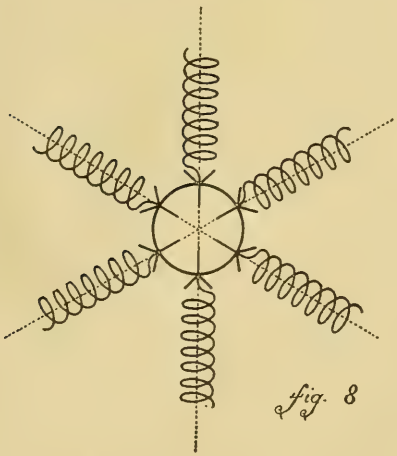


fig. 8

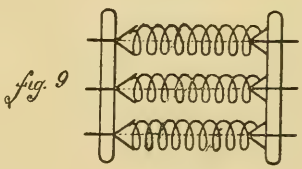


fig. 9

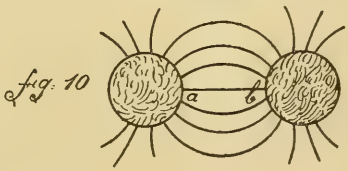


fig. 10
a
b

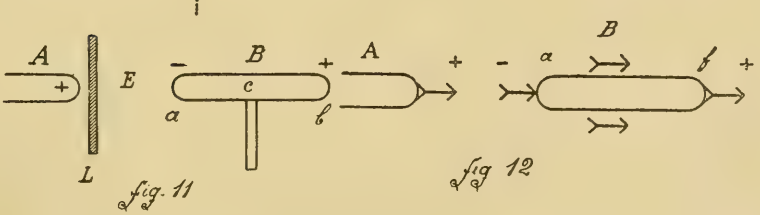

A
+
E
L
fig. 11
B
-
+
c
a
b
A
+
B
-
a
b
+
fig 12

fig. 13

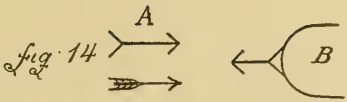
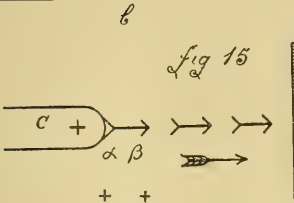
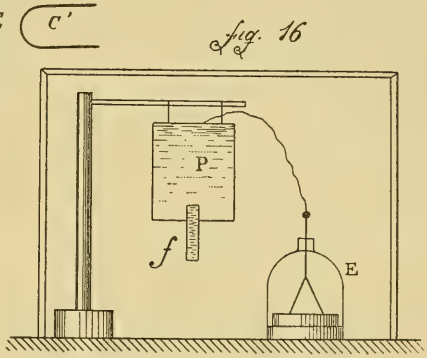


fig. 14





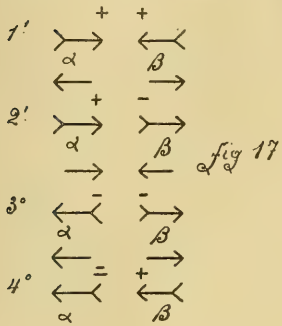


fig 17

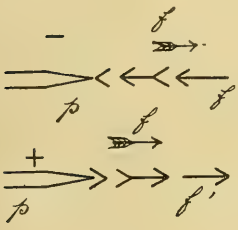


fig 18

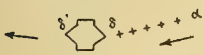
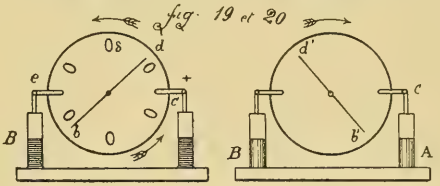


fig. 23



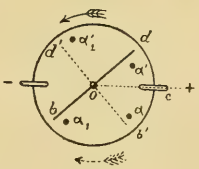


fig. 21

fig 22

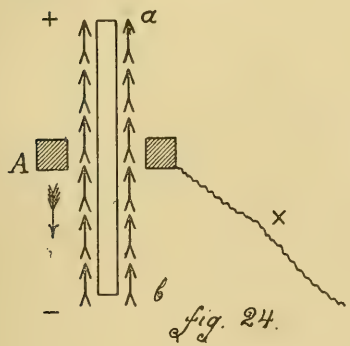


fig. 24.

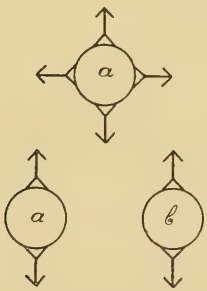


fig 25

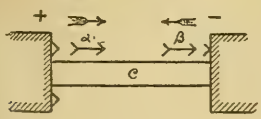


fig 26

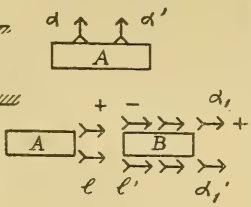


fig. 27

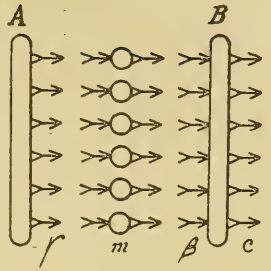


fig. 28.

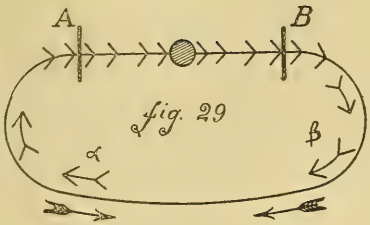


fig. 29

fig. 30

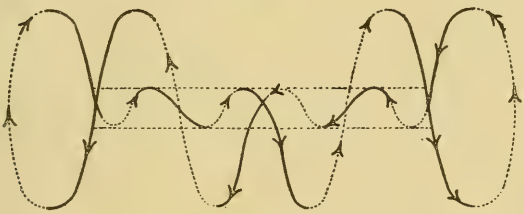


fig. 30 bis

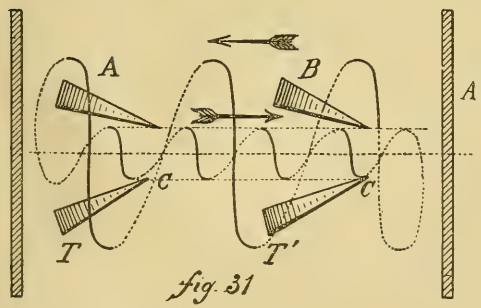


fig. 31

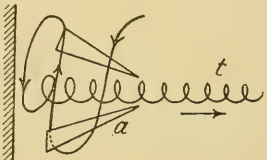


fig. 32

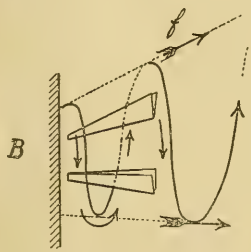


fig 33

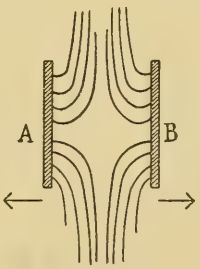


fig. 34

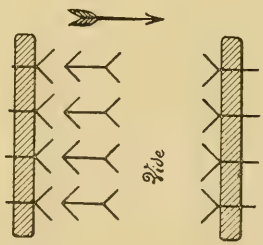


fig. 35

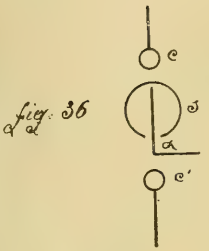


fig. 36

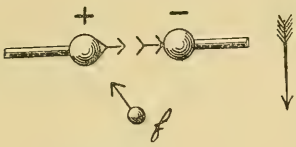


fig. 37

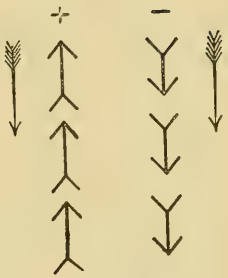


fig. 38

fig. 39

fig. 40

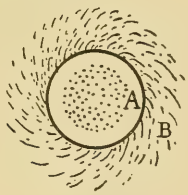


fig. 41

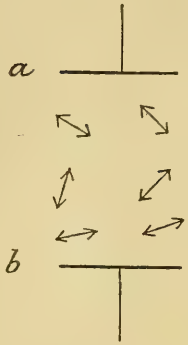


Fig. 1.

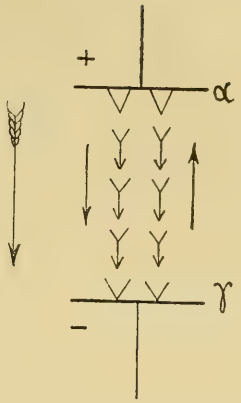


Fig. 2.

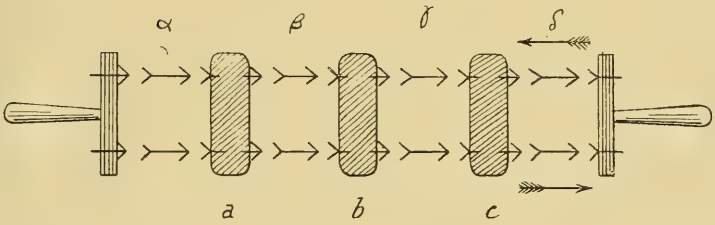


Fig. 3.

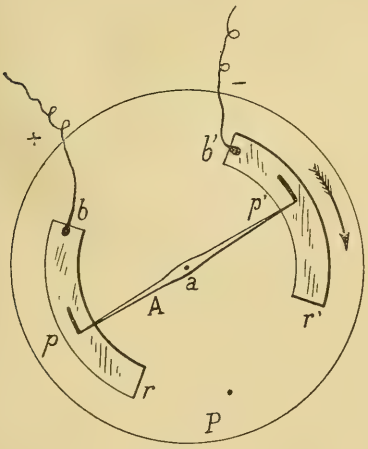


Fig. 4.

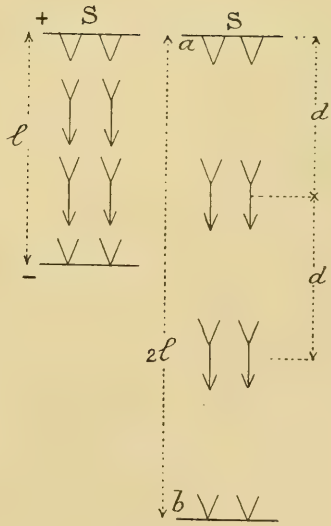


Fig. 5.

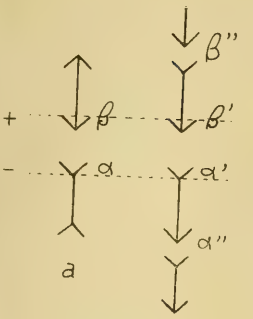


Fig. 6.

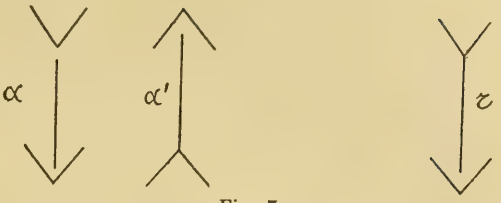
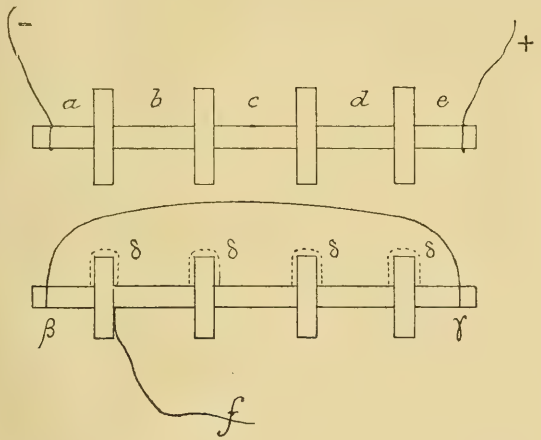


Fig. 7.

Fig. 8.



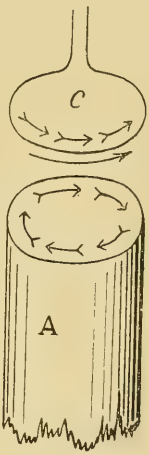


Fig. 10.

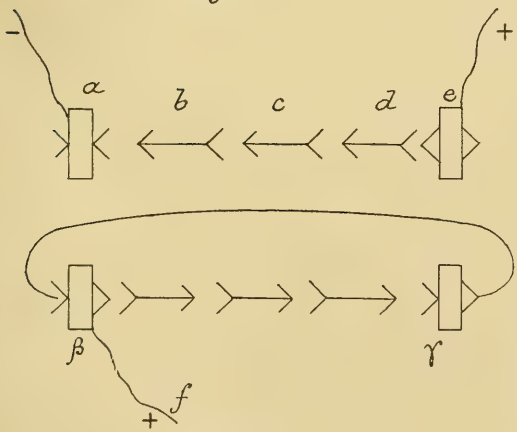


Fig. 9.

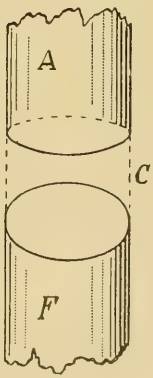
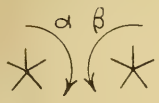


Fig. 11.



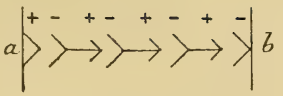


Fig. 12.

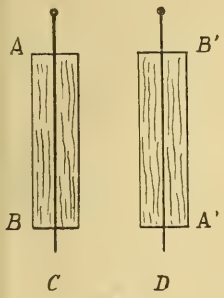


Fig. 13.

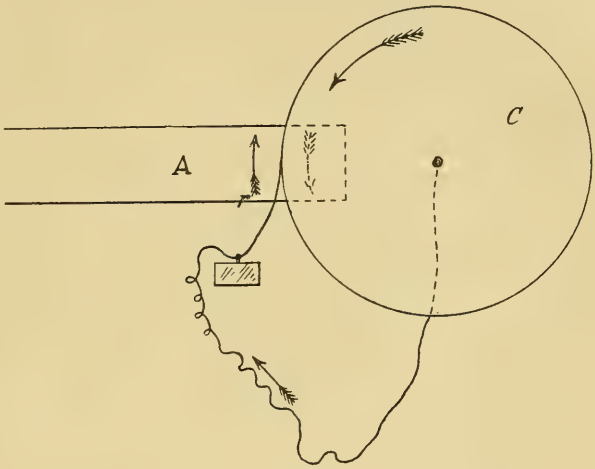


Fig. 14.

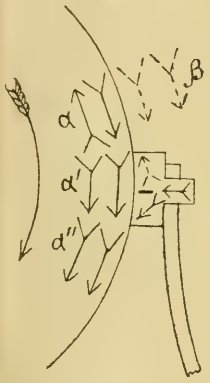


Fig. 15.

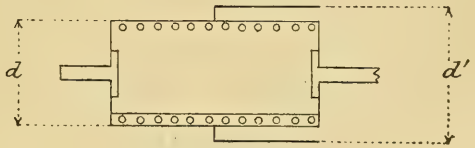


Fig. 15bis.

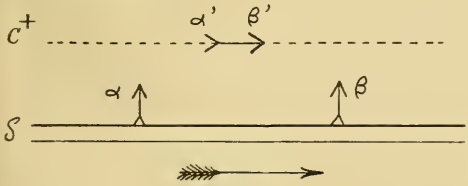


Fig. 16.

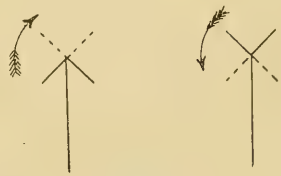


Fig. 17.

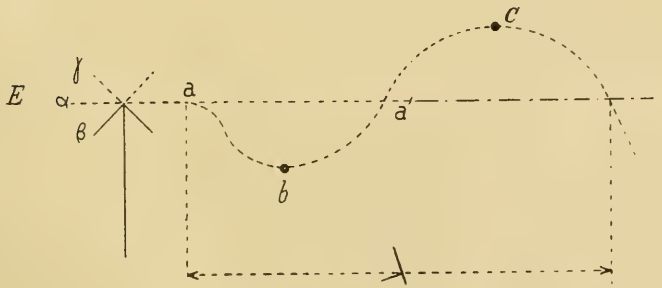


Fig. 18.

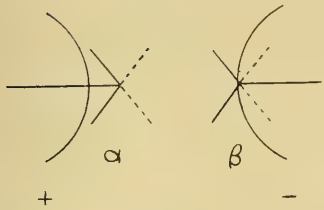


Fig. 19.

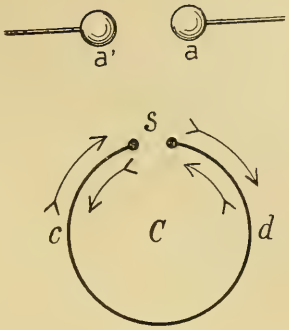


Fig. 21.

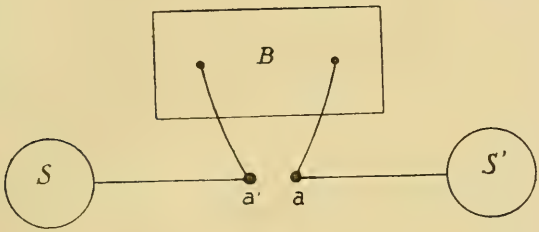


Fig. 20.

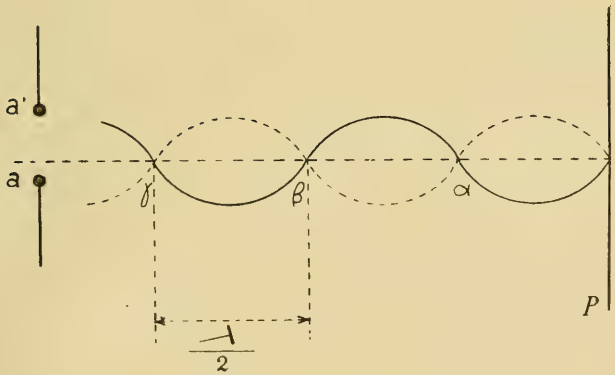


Fig. 22.

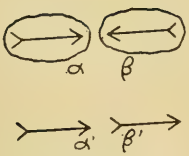


Fig. 23.

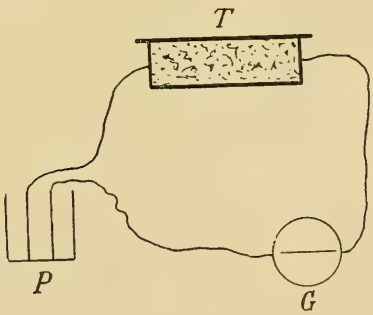


Fig. 24.

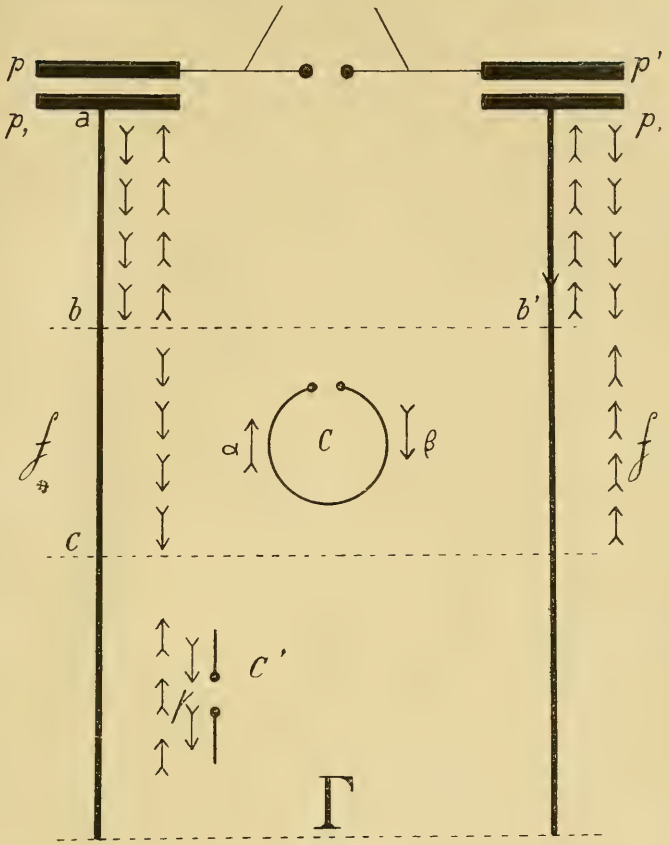


Fig. 25.

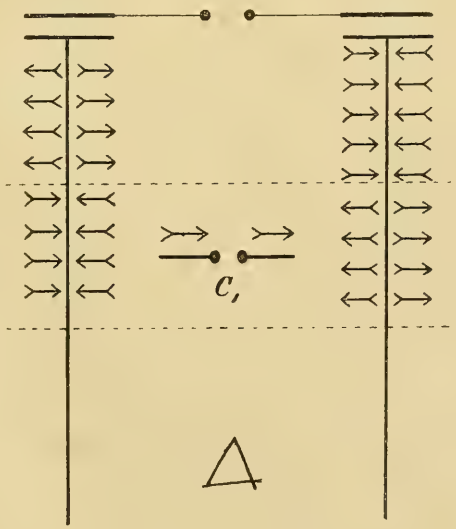


Fig. 26.

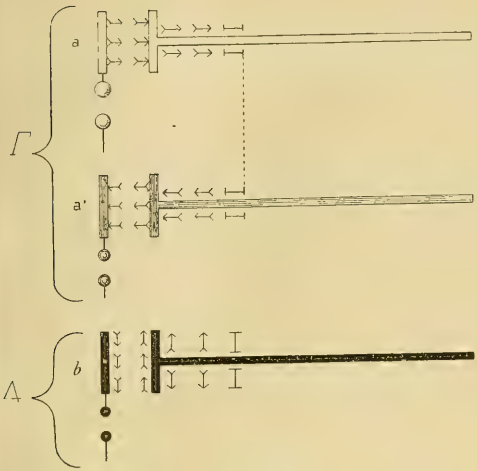


Fig. 27.

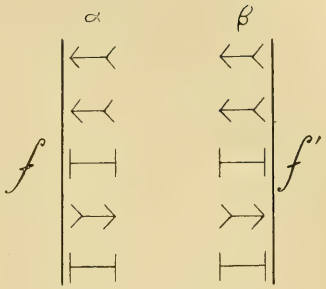


Fig. 28.

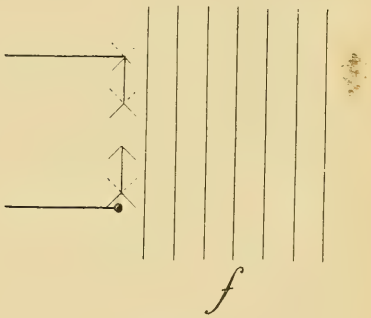


Fig. 29.

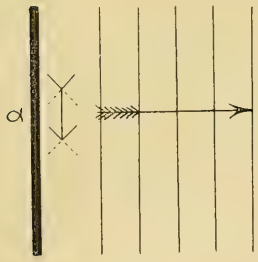


Fig. 30.

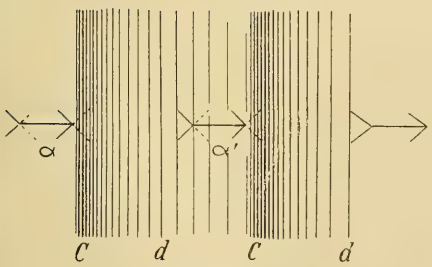


Fig. 31.

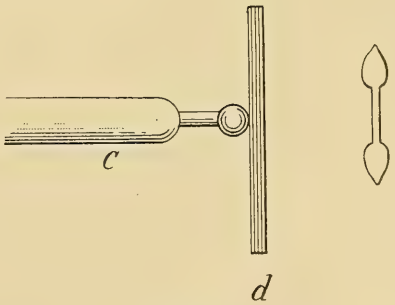


Fig. 32.

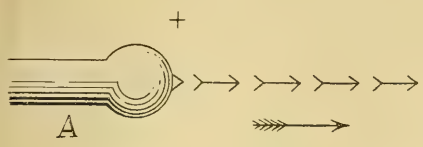


Fig. 1.

Fig. 5.

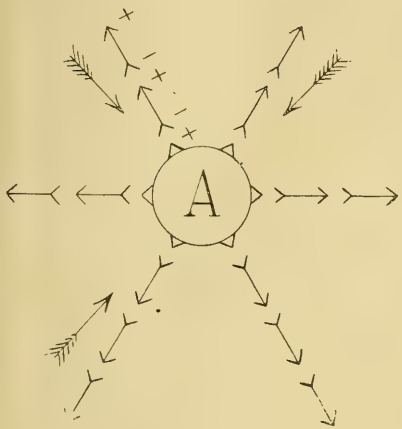


Fig. 2.

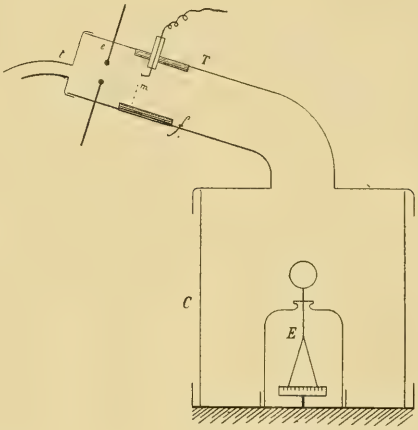


Fig. 4.

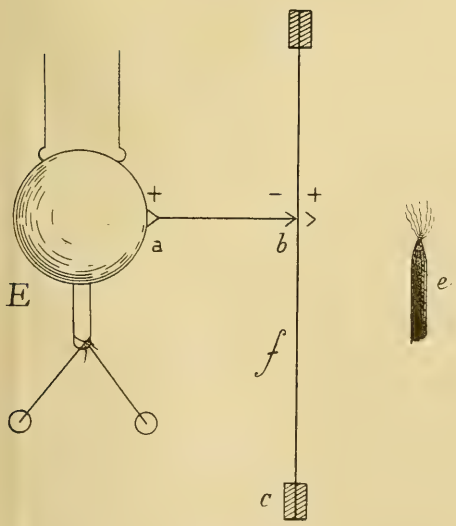


Fig. 3.

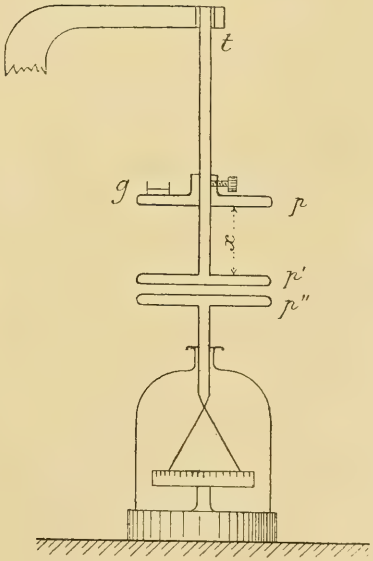


Fig. 6.

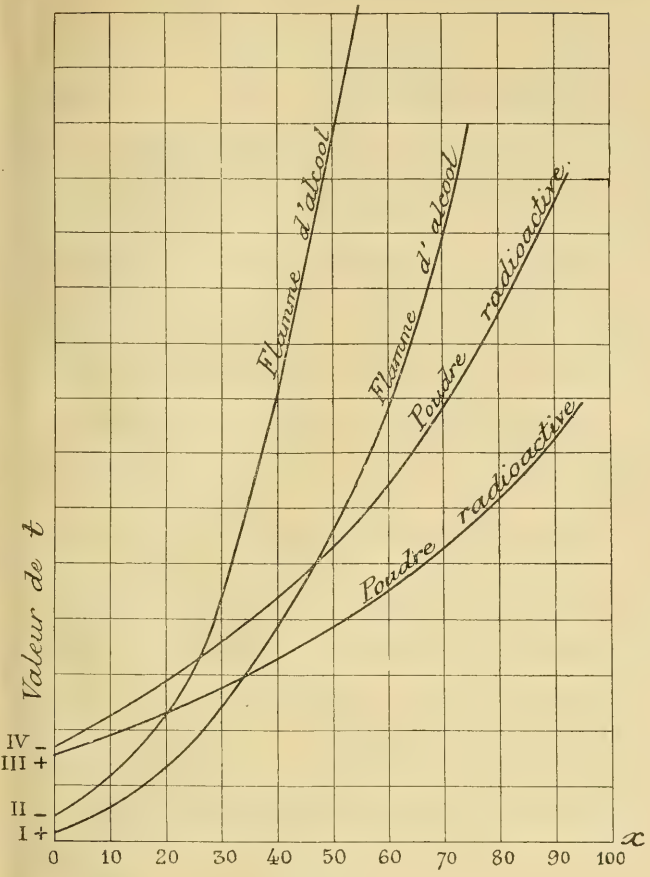


Fig. 7.

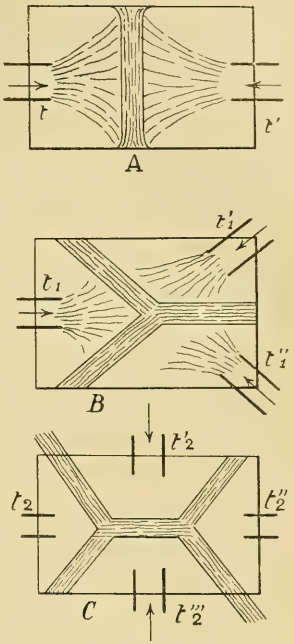
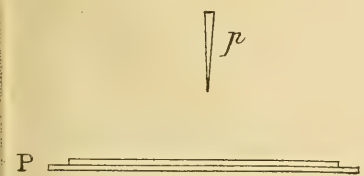


Fig. 8.



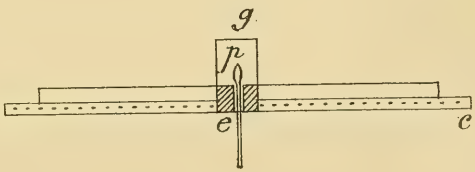


Fig. 10.

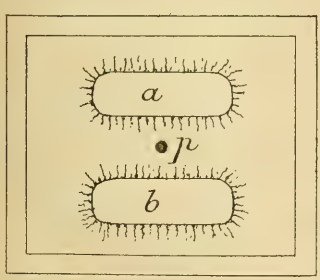


Fig. 9.

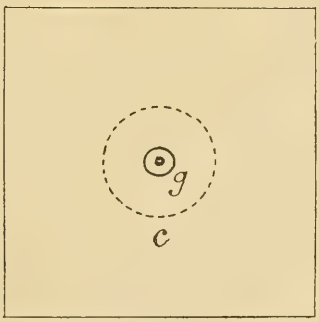


Fig. 11.

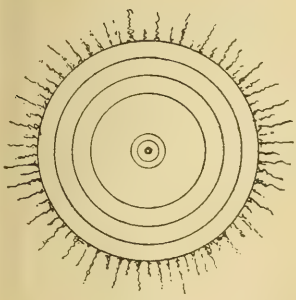


Fig. 12.

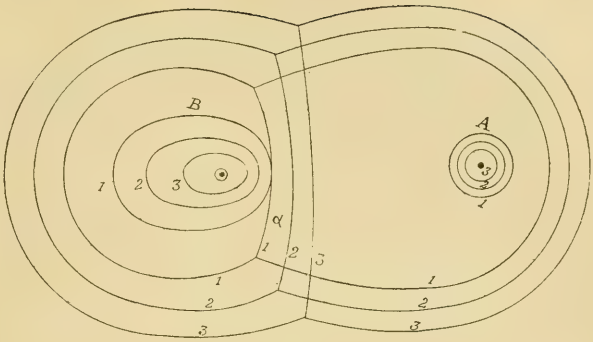


Fig. 13.

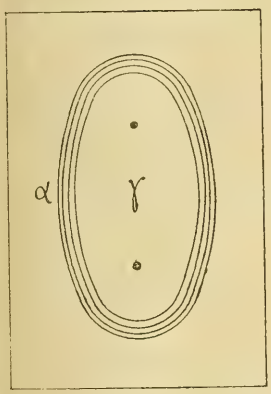


Fig. 14.

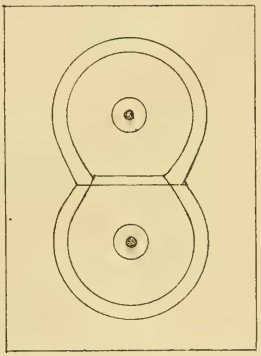


Fig. 15.

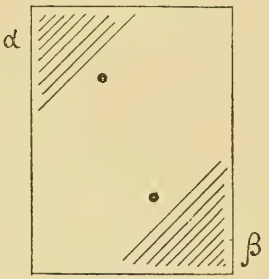


Fig. 16.

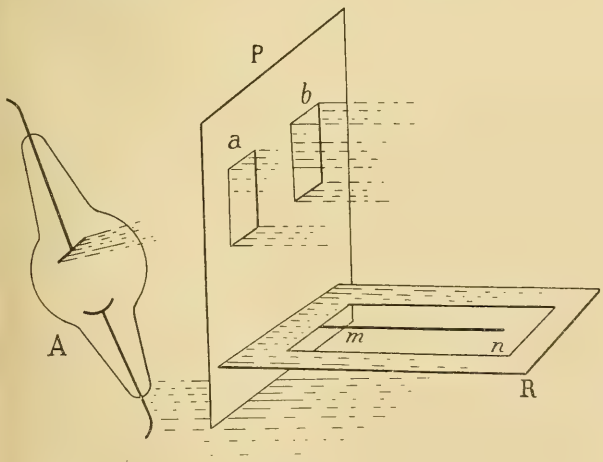


Fig. 17.

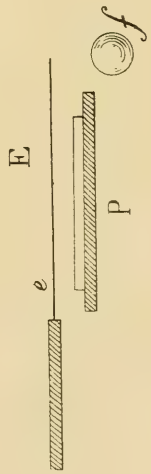


Fig. 18.

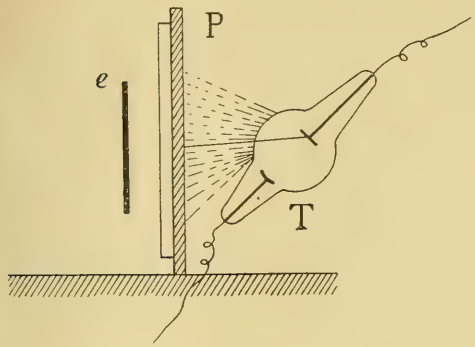


Fig. 19.

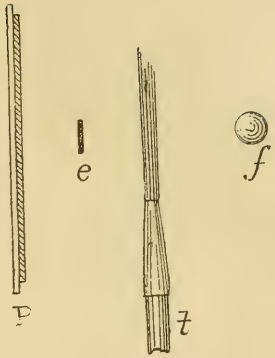


Fig. 23.

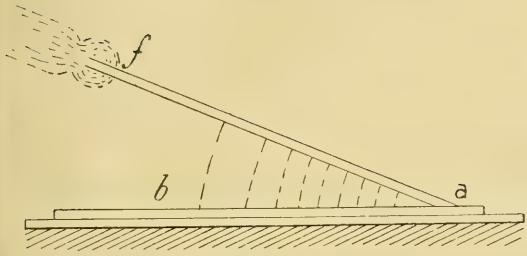


Fig. 20.

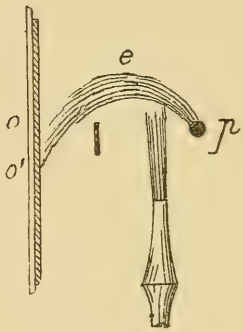


Fig. 24.

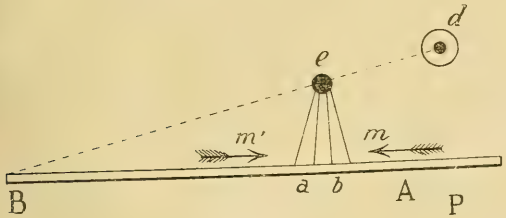


Fig. 21.

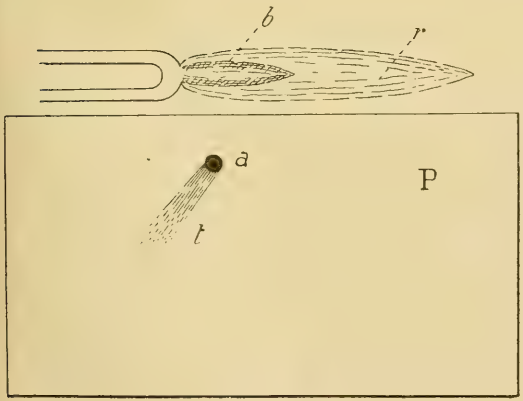


Fig. 22.

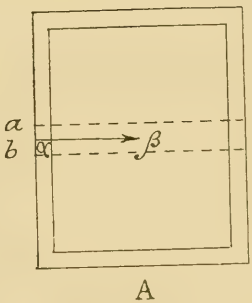


Fig. 25.

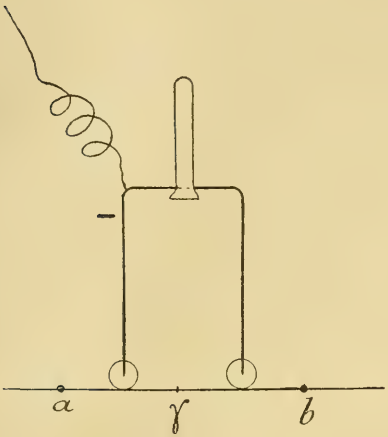


Fig. 26.

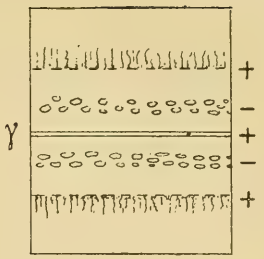


Fig. 27.

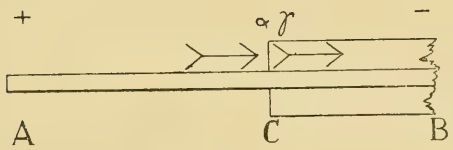


Fig. 28.

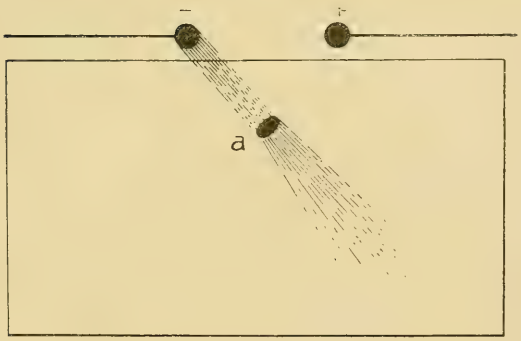


Fig. 29.

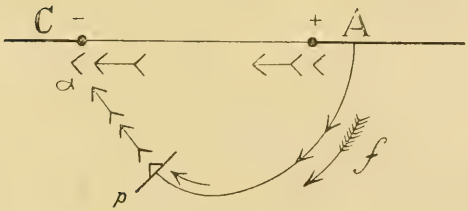


Fig. 30.

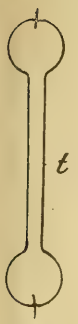


Fig. 1

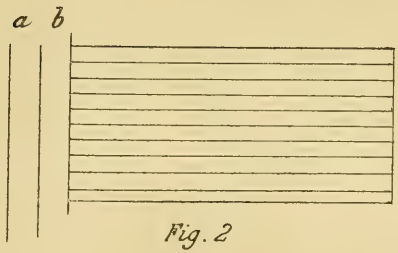


Fig. 2

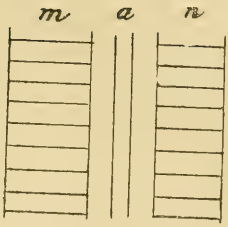


Fig. 3

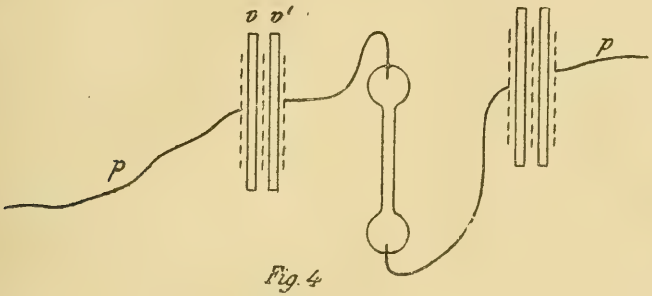


Fig. 4

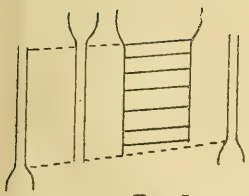


Fig. 5

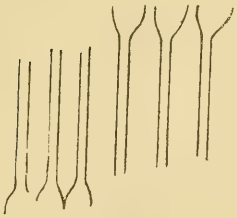


Fig. 6

Fig. 7

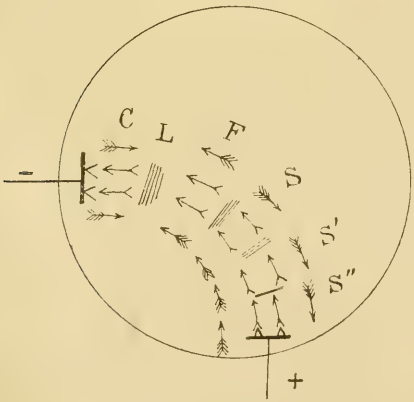


Fig. 8.

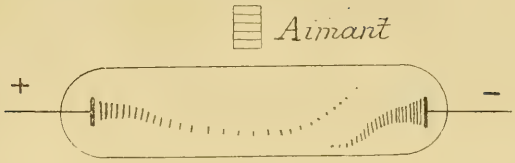


Fig. 9.

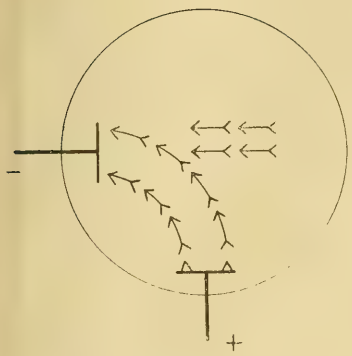


Fig. 10.

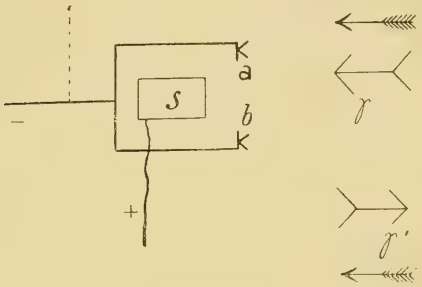


Fig. 13.

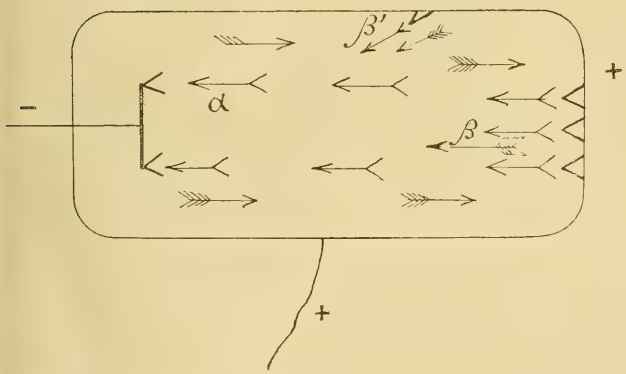


Fig. 11.

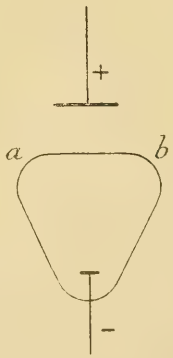


Fig. 14.

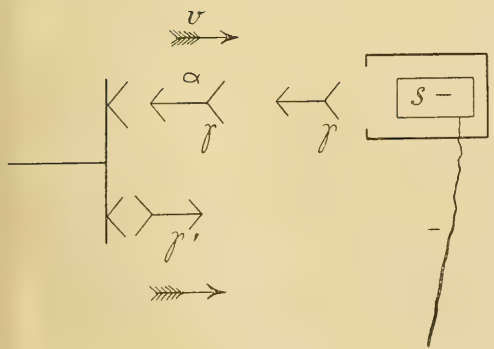


Fig. 12.

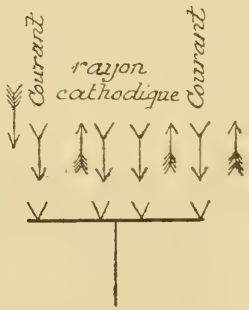


Fig. 15.

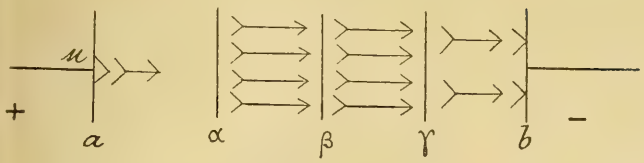


Fig. 16.

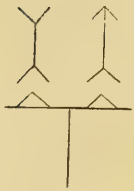


Fig. 17.

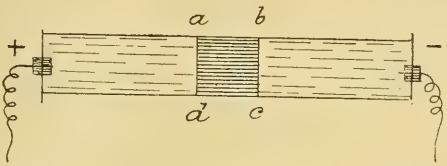


Fig. 19.

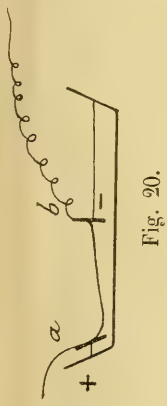


Fig. 20.

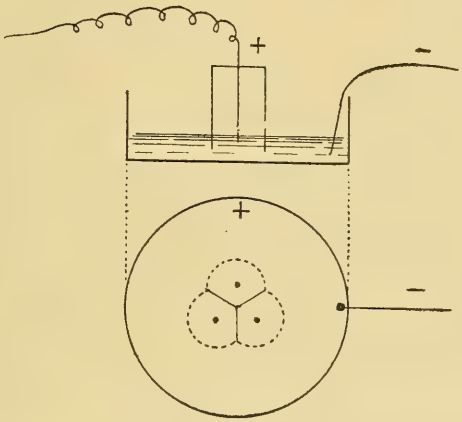


Fig. 22.

Fig. 18.

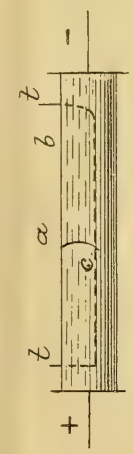


Fig. 21.

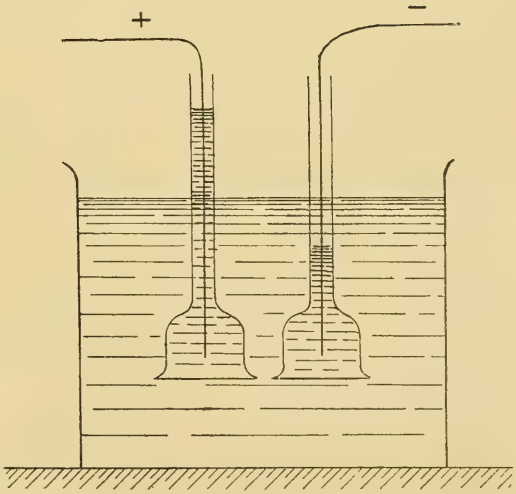


Fig. 23.

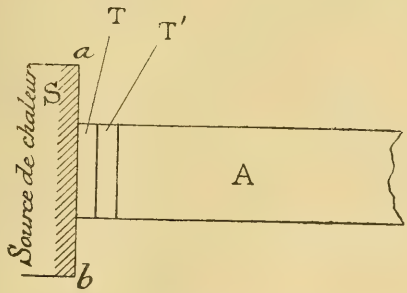
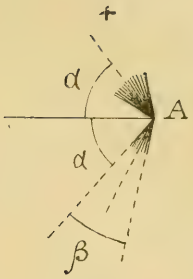


Fig. 1.



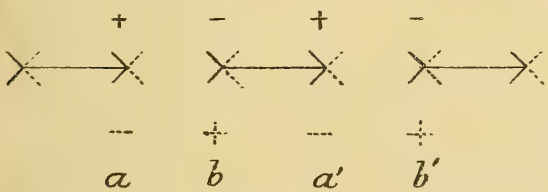


Fig. 2.

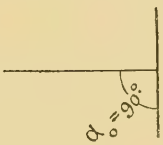


Fig. 3.

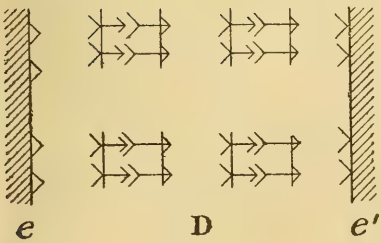


Fig. 4.

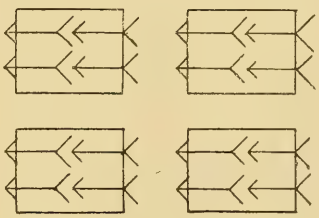


Fig. 5.

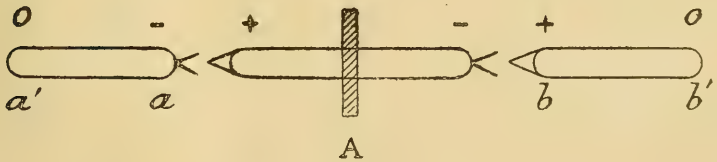


Fig. 6.

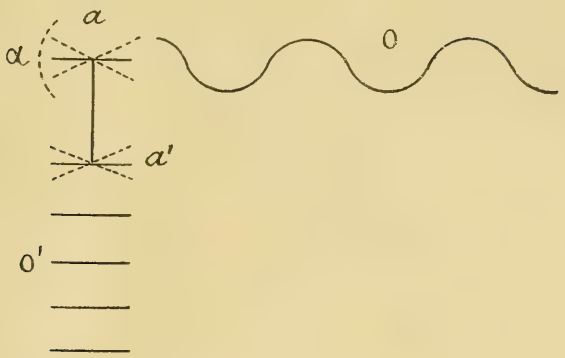


Fig. 1.

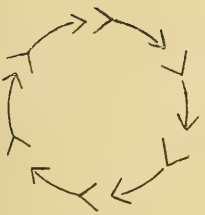


Fig. 2.

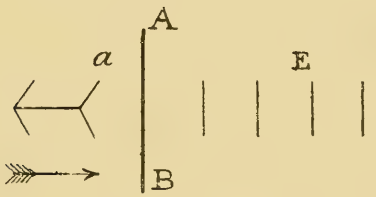


Fig. 3.

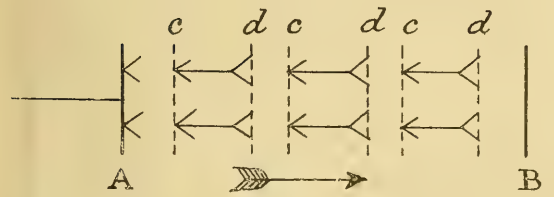


Fig. 4.

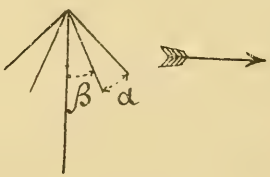


Fig. 5.

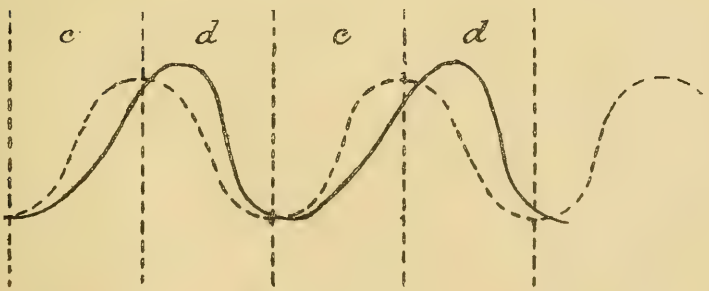


Fig. 6.

Fig. 7.

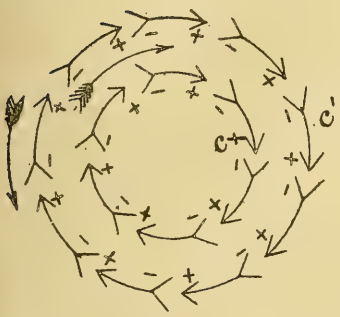


Fig. 8.

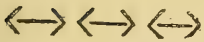


Fig. 9.

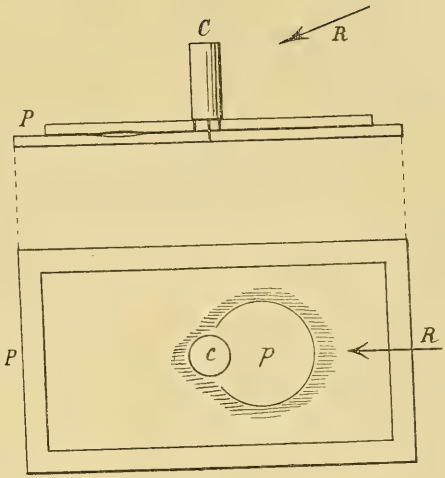


Fig. 10.

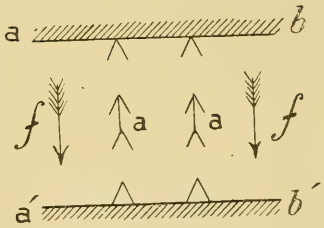


Fig. 11.

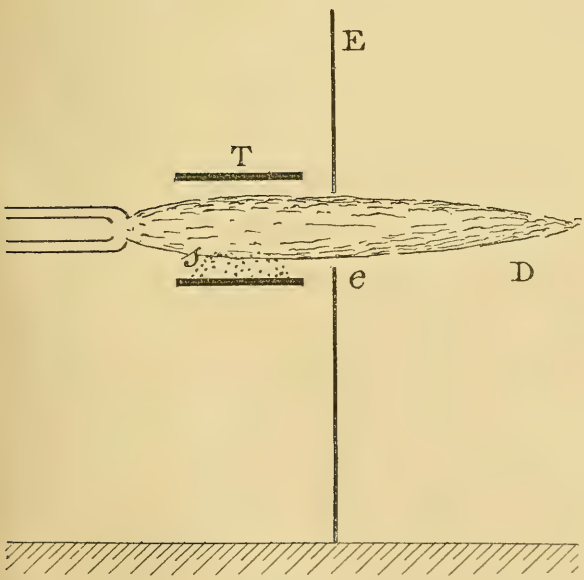


Fig. 12.

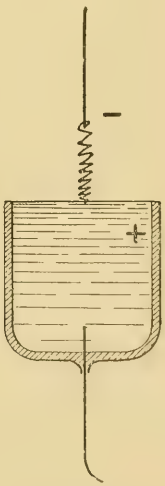


Fig. 13.

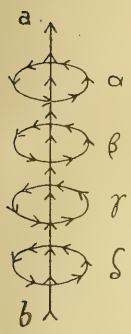
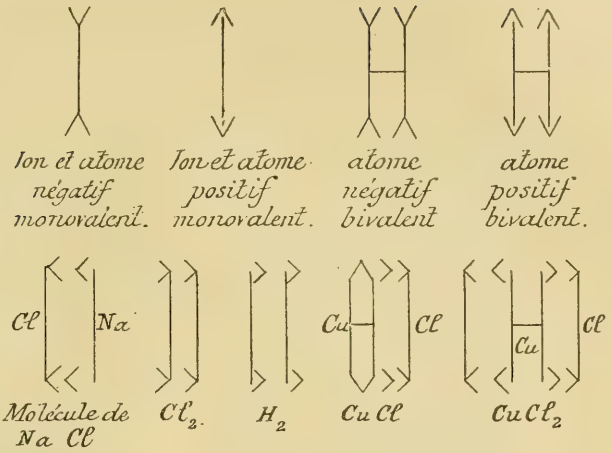
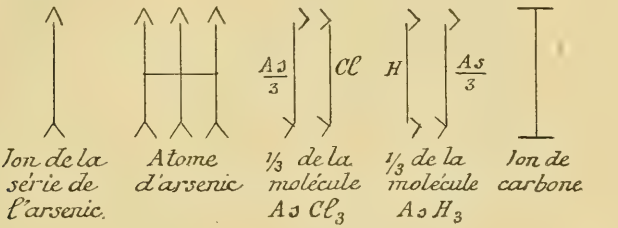


Fig. 1.





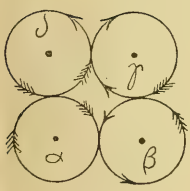


Fig. 2.

ATOMES DU FER DANS DIVERSES COMBINAISONS.

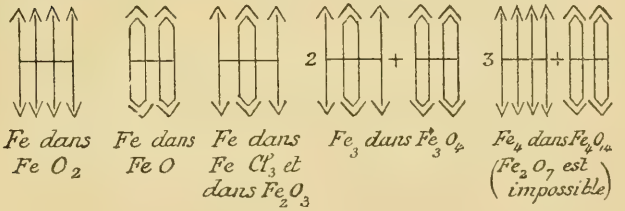


Fig. 3.

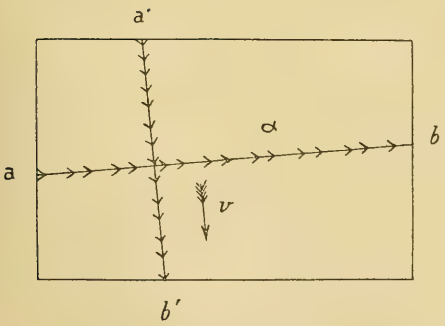
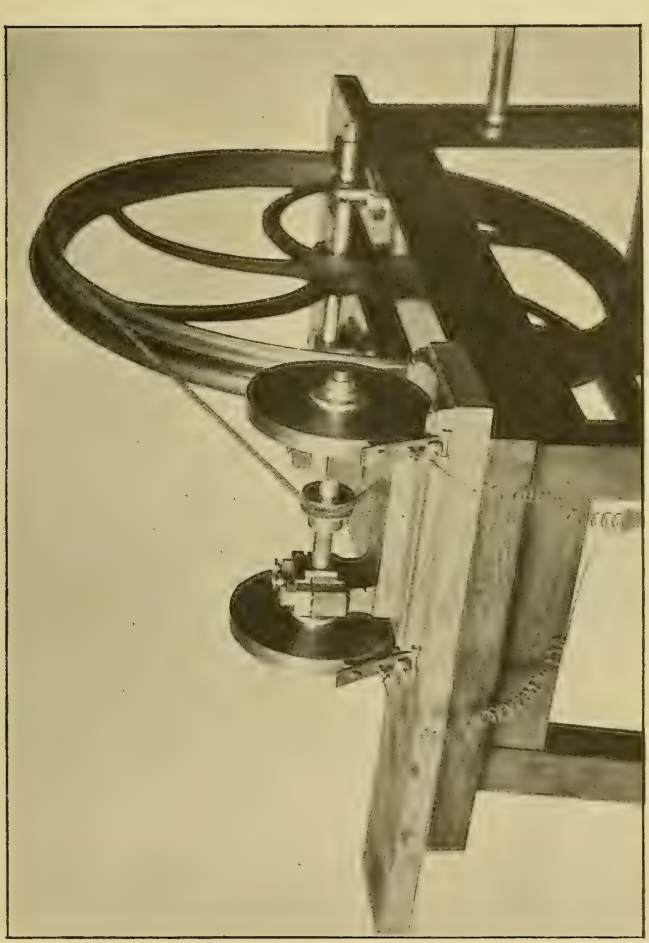
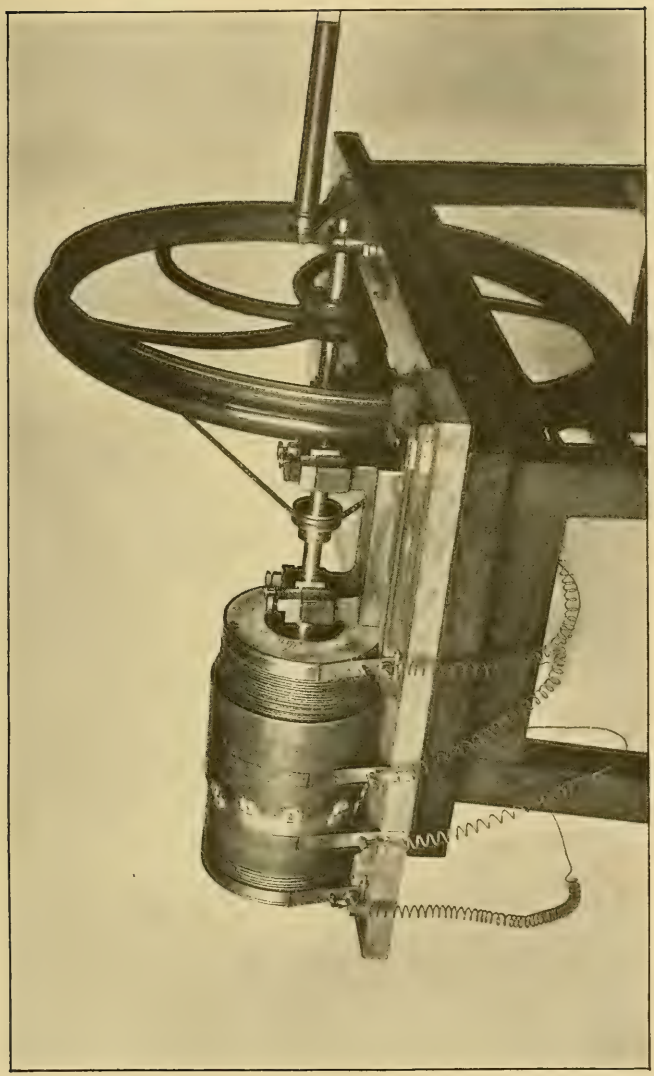


Fig. 4.

Fig. 5.



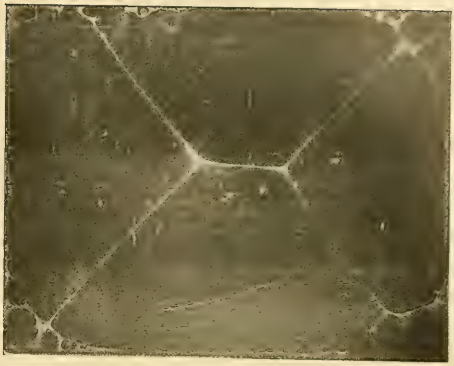
Photogramme I.



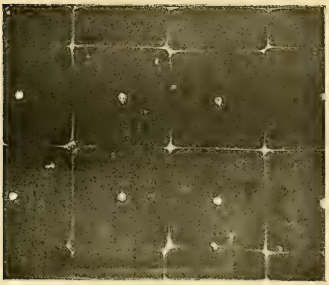
Photogramme II.

1

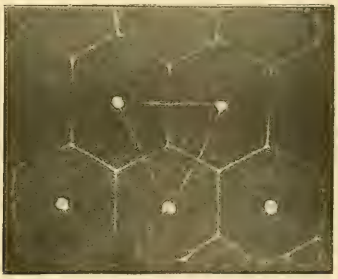
2



3



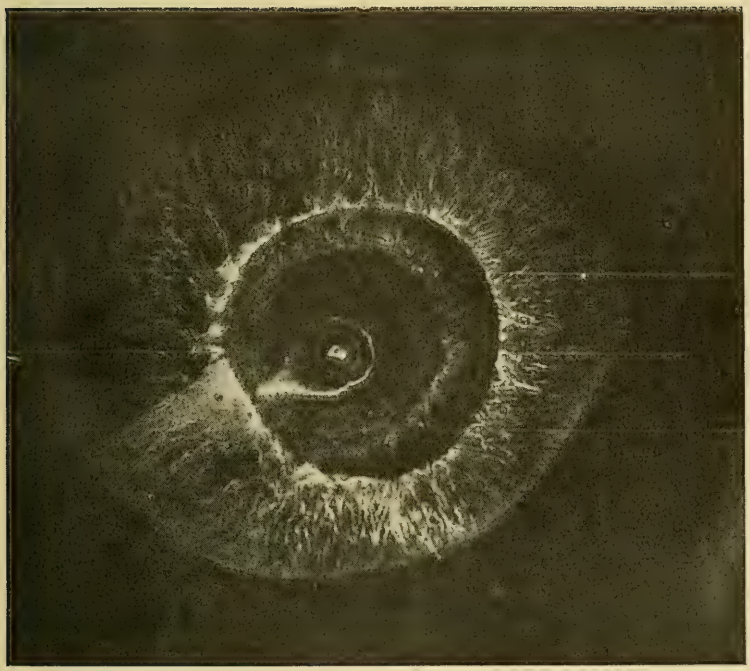
4



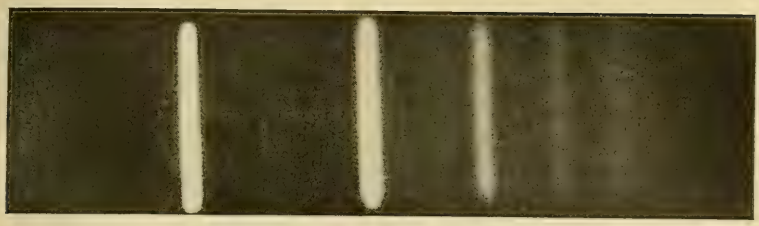
5

6 (fig. 27)

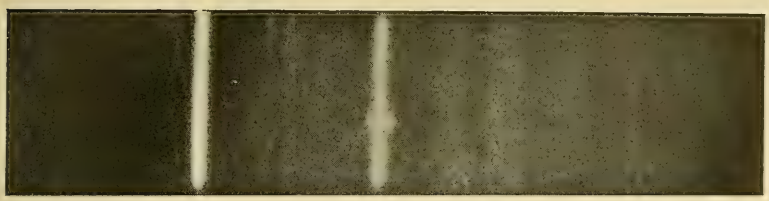
Photogramme III.



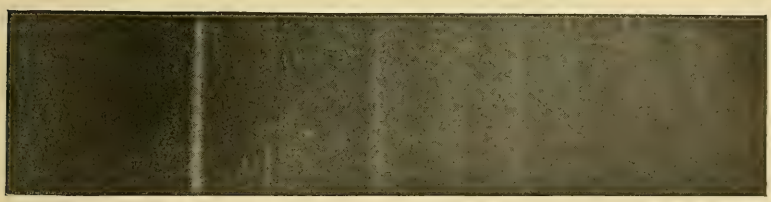
Photogramme IV.

Rouge.  Violet.

Courant direct. Interrupteur à main.



Interrupteur Whenelt. Interposition de cinq glaces.



Oscillation unipolaire.

Machine de Holz, sans condensateur.

Photogramme IV^{bis}.

Photogramme V.

ANOMALIES

DANS LA

DÉCLINAISON MAGNÉTIQUE

AUX ENVIRONS DE LIÉGE

PAR

M. DEHALU

ASTRONOME A L'OBSERVATOIRE DE COINTE
RÉPÉTITEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

ANOMALIES

DANS LA

DÉCLINAISON MAGNÉTIQUE

AUX ENVIRONS DE LIÉGE

Ce travail comprend des déterminations de la déclinaison magnétique prises en dix-sept stations situées aux environs de Liége; elles établissent : 1° qu'il existe dans le bassin de Liége des causes qui influent sur la direction de l'aiguille aimantée; 2° que les terris des exploitations minières dévient l'aimant.

Les premières observations furent faites à l'aide d'une simple boussole de mine, les 13 et 14 août 1903, aux trois stations suivantes : *a*) Observatoire de Cointe (salle magnétique); *b*) Parc d'Avroy à Liége, sur le pilier établi par les soins de l'Administration des Mines pour la vérification des boussoles; *c*) Siège du charbonnage de Gérard-Cloes, à Vottem.

A l'Observatoire de Cointe, l'aiguille fut observée sous un azimut de 4° 40′ environ; à Vottem, successivement, sous des azimuts de 129° 43′, 135° 0′ et 321° 38′.

Ces azimuts avaient été déterminés par moi-même à l'aide d'observations de la Polaire, à Cointe, le 25 juillet 1900 et à Vottem, le 25 juillet 1903.

Au parc d'Avroy, la direction de l'aiguille aimantée s'observe à partir du nord vrai; les observations astronomiques en ce point furent faites, je pense, par M. F. Folie, vers 1885.

L'écart que présentait la déclinaison magnétique de la boussole au parc d'Avroy, comparée à celles de Cointe et de Vottem, me fit

croire tout d'abord qu'une erreur avait été commise en cet endroit dans la détermination astronomique de la méridienne. Je la vérifiai, le 17 août, par quatorze pointés des bords inférieur et supérieur du Soleil; le résultat fut que mon hypothèse était peu fondée.

Je pense qu'il ne sera pas sans intérêt de rapporter d'abord les observations astronomiques effectuées aux trois stations ci-dessus désignées.

Cointe. — 25 juillet 1900.

Latitude . . . . . 50°37'6"
Longitude . . . . . 0h22m17s E. Gr.

Station : salle magnétique de l'Observatoire de Cointe.

Repère : angle du milieu de la grande cheminée à l'ouest de la maison n° 54, rue du Batty, à Cointe.

$$\left.\begin{matrix} 17°49'30'' \\ 17\ 47\ 30 \end{matrix}\right\} 17°48'30''$$

Observation de la Polaire.

Heure sidérale.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
—	—	—
17h19m55s	49°59'10"	14°46'40"
17 29 15	129 56 40	14 49 40
17 34 34	50 3 0	14 50 10
17 39 39	129 53 20	14 53 30
17 44 43	50 6 10	14 52 30
18 19 4	129 41 40	15 0 40
18 23 24	50 17 20	14 59 30
18 27 24	129 38 50	15 59 40
18 31 33	50 20 0	15 1 20

Vérification du repère.

26 juillet 1900, matin.

$$\left.\begin{matrix} 17°47'30'' \\ 17\ 48\ 30 \end{matrix}\right\} 17°48'$$

Instruments : théodolite de Negretti et chronomètre sidéral de Hohwü.

Calcul.

η	α	A	Nord géographique.
8h 3m21s	1h23m16s	1°39′28″4	13° 7′11″6
7 53 59	1 23 16	1 40 41.5	13 8 58.5
7 48 42	1 23 16	1 41 59.2	13 8 10.8
7 43 37	1 23 16	1 42 10.4	13 11 19.6
7 38 33	1 23 16	1 44 18.6	13 8 11.4
7 4 12	1 23 16	1 50 34.0	13 10 6.0
6 59 52	1 23 16	1 51 18.9	13 8 11.1
6 55 52	1 23 16	1 51 51.9	13 7 48.1
6 52 43	1 23 16	1 51 54.1	13 9 25.9
		Moyenne. . .	13° 8′49″0

Repère . . . . . 17°48′15″
Nord géographique. 13 8 49

Azimut du repère . . . . . 4° 39′ 26″

Liége. — 13 août 1903, soir.

Latitude . . . . . 50°37′50″
Longitude. 0h22m17s

Station : pilier du parc d'Avroy.
Repère : base de la croix du clocher de Sainte-Walburge.

$$\left.\begin{matrix} 193° \ 0' \ 20'' \\ 12 \ 59 \ 30 \end{matrix}\right\} \ 12° 59' 55''$$

Observations des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure sidérale.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
13h50m 9s	28°13′20″	269°22′40″
13 53 4	331 41 40	90 15 50
13 56 52	331 49 10	91 3 40
14 1 15	26 52 0	271 57 0
. . . . .	. . . . .	. . . . .
14 13 59	24 52 40	274 22 50
14 18 23	336 9 50	95 17 40
14 20 54	336 1 40	95 48 10
14 24 13	22 45 30	276 25 0
14 26 37	22 54 0	276 52 50
14 29 53	337 58 10	97 35 50

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix} 12^\circ 59' 50'' \\ 13\ \ 0\ 10 \end{matrix}\right\} 13^\circ 0' 0''$$

N. B. — On touche légèrement aux vis de collimation.

Observations des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure sidérale.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
—	—	—
$14^h 40^m 34^s$	$339^\circ\ 5' 40''$	$99^\circ 39' 30''$
14 43 19	19 44 20	280 14 20
14 46 23	19 46 20	280 49 30
14 49 20	341 0 30	101 22 0

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix} 192^\circ 59' 50'' \\ 12\ 56\ 30 \end{matrix}\right\} 12^\circ 58' 10''$$

Instruments : théodolite de Negretti et chronomètre sidéral de Hohwü.

Calcul.

Observations.	Z	δ	A	Nord géographique.
—	—	—	—	—
5- 8	$66^\circ 10' 20''$	$13^\circ 40' 16''$	$82^\circ 29'\ 6''$	$12^\circ 59' 11''$
11-14	70 11 20	13 39 59	87 31 57	12 59 23
			Moyenne.	$12^\circ 59' 17''$

Azimut du repère.

Repère.	$12^\circ 59' 22''$
Nord géographique	12 59 17
Azimut du repère	$0^\circ\ 0'\ 5''$

Vottem. — 25 juillet 1903.

Latitude . . . . . 50°39′ 50″
Longitude . . . . . 0h22m28s E. Gr.

Station : prairie au nord du siège du charbonnage de Gérard-Cloes, à Vottem.

Repères : 1° Base de la croix du clocher de Saint-Gilles :

$$\left.\begin{matrix} 3°54'10'' \\ 183\ 51\ 15 \end{matrix}\right\} 3°52'42''5$$

2° Base de la croix du clocher de l'église Saint-Paul (cathédrale), à Liége :

$$\left.\begin{matrix} 358°37'25'' \\ 178\ 34\ 25 \end{matrix}\right\} 358°35'55''$$

3° Base de la croix du clocher de l'église de la Préalle :

$$\left.\begin{matrix} 171°59'10'' \\ 351\ 56\ 20 \end{matrix}\right\} 171°57'45''$$

Observation de la Polaire.

Heure sidérale.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
—	—	—
16h42m38s	49°52′15″	135° 2′40″
16 47 16	49 53 22.5	135 4 15
16 51 56	49 54 45	135 5 45
16 54 31	49 55 0	135 6 25
16 57 26	49 55 52.5	135 7 20
17 3 3	49 57 45	315 7 45
17 5 41	49 58 22.5	315 8 35
17 10 20	49 59 30	315 9 30
17 14 38	50 1 22.5	315 10 40
17 16 35	50 1 45	315 11 25

Instruments : théodolite de Wanschaff et chronomètre sidéral de Hohwü.

Calcul par les angles horaires.

Observations.	η	α	A	Nord géographique.
1	15h17m54s	1h24m43s9	1°25′51″	133°36′49″
2	15 22 32	»	1 27 21	133 36 54
3	15 27 12	»	1 28 50	133 36 55
4	15 29 47	»	1 29 38	133 36 47
5	15 32 42	»	1 30 32	133 36 48
6	15 38 19	»	1 32 12	313 35 33
7	15 40 57	»	1 32 58	313 35 37
8	15 45 36	»	1 34 18	313 35 12
9	15 49 54	»	1 35 30	313 35 10
10	15 51 51	»	1 36 4	313 35 21
			Moyenne . . .	133°36′ 6″6

Azimuts des repères.

I.	Nord géographique	133°36′ 6″6
	Clocher de Saint-Gilles	3 52 42 5
	Azimut de Saint-Gilles.	129°43′24″
II.	Nord géographique	133°36′ 6″6
	Clocher de Saint-Paul	358 35 55 0
	Azimut de Saint-Paul	135° 0′12″
III.	Clocher de la Préalle	171°57′45″
	Nord géographique	133 36 6 6
		38°21′38″ - 360°
	Azimut de la Préalle	321 38 22

Voici maintenant les observations magnétiques effectuées à la boussole de mine :

Observations à la boussole de mine n° 1.

Cointe. — 13 août 1903.

Station : salle magnétique de l'Observatoire.

Repère : angle du milieu de la grande cheminée de la maison n° 54, rue du Batty, à Cointe.

Pointés du repère.

Lunette à droite. . .	341°59′	Lunette à gauche . .	161°57′
Moyenne	341°58′		
Azimut du repère.	– 4 40		
Nord magnétique	346°38′ – 360°		
	13 22		

Liége. — 13 août 1903.

Station : pilier du parc d'Avroy.

Repère : base de la croix du clocher de Sainte-Walburge.

Pointés du repère.

Lunette à droite. . .	346°12′	Lunette à gauche . .	166°15′
Moyenne.	346°14′		
Nord magnétique	13 46		

Vottem. — 14 août 1903.

Station : prairie au nord du siège du charbonnage de Gérard-Cloes, à Vottem.

Repères : I. Clocher de Saint-Gilles; II. Clocher de la Préalle.

Pointés des repères.

I. Clocher de Saint-Gilles.

Lunette à droite. . .	116°24′	Lunette à gauche. . .	296°6′
Moyenne.	116°15′		
Azimut du repère.	129 43		
Nord magnétique.	13°28′		

II. Clocher de la Préalle.

Lunette à droite . .	308°3′	Lunette à gauche. . .	128°9′
Moyenne.	308° 8′		
Azimut du repère.	321 38		
Nord magnétique.	13°30′		

Comme on le voit, la différence des déclinaisons magnétiques Liége-Cointe s'élève à 24′ et celle Liége-Vottem à 17′ seulement.

Du 18 au 25 août, de nouvelles déterminations furent prises aux trois mêmes stations à l'aide d'un petit théodolite de Breithaupt donnant les 0ᵍ02 aux verniers, que m'avait prêté très obligeamment M. G. Massart, géomètre du cadastre à Liége. Cet instrument, qui est muni d'un déclinatoire de forme rectangulaire, rendu solidaire du cercle azimutal, permet des déterminations assez précises. Pour opérer avec un tel appareil, on commence par le mettre de niveau, puis on amène l'extrémité nord de l'aiguille aimantée devant un trait marqué sur le déclinatoire. Le zéro du cercle azimutal occupe donc toujours la même position, pourvu que la direction de l'aiguille aimantée demeure parallèle à elle-même aux différentes stations. On vise ensuite un repère éloigné dont l'azimut a été au préalable déterminé astronomiquement; on fait la lecture du cercle azimutal et l'on ajoute avec son signe la valeur de l'azimut astronomique du repère. Le nombre ainsi obtenu est la lecture qu'il faudrait faire pour diriger l'axe optique de la lunette dans le méridien astronomique. Puisque ce nombre dépend ici de la direction de l'aiguille aimantée, il restera le même aux stations non influencées, du moins pour celles qui sont situées dans un rayon de quelques kilomètres (¹); il variera, au contraire, si une cause quelconque dévie l'aimant, et les différences obtenues donneront la mesure des influences. Ainsi la lecture du méridien au parc d'Avroy, le 18 août 1903, à 14 heures, était 25° 56′ 17″; à Cointe, le même jour, à 15 heures, elle n'était que de 25° 30′ 47″ et, à Vottem, les 24 et 25 août, 25° 41′ 45″. Ce qui donne pour la différence Liége-Cointe 25′ et pour celle Liége-Vottem 15′. Voici d'ailleurs le détail des observations :

Liége.

Station : pilier du parc d'Avroy.

(¹) Quand les éléments magnétiques se distribuent régulièrement à la surface du globe, on compte que la déclinaison varie, sous nos latitudes, d'environ 30′ par degré de longitude; ce qui représente une variation de 5′ par 20 kilomètres.

Repère : base de la croix du clocher de Sainte-Walburge (nord vrai).

Pointés de l'aiguille et du repère :

18 août 1903, de 13 h. 30 m. à 14 h. 30 m.

28ᵍ83 28ᵍ84 28ᵍ85 28ᵍ80 28ᵍ76 28ᵍ82 28ᵍ81 28ᵍ86 28ᵍ87 28ᵍ77 28ᵍ83

Lecture du méridien, moyenne : 28ᵍ82 = 25° 56′ 17″.

Cointe.

Station : salle magnétique de l'Observatoire de Cointe.

Repère : angle du milieu de la grande cheminée, à l'ouest de la maison n° 54, rue du Batty, à Cointe (azimut, 4° 39′ 30″).

Pointés de l'aiguille et du repère :

18 août, de 14 h. 50 m. à 15 h. 30 m.

33ᵍ53 33ᵍ55 33ᵍ56 33ᵍ49 33ᵍ50 33ᵍ54 33ᵍ55 33ᵍ50.

Moyenne 33ᵍ53 = ...	30° 10′ 17″
Azimut du repère	– 4 39 30
Lecture du méridien	25° 30′ 47″

Vottem.

Station : prairie au nord du siège du charbonnage de Gérard-Cloes, à Vottem.

Repères : I. Base de la croix du clocher de Saint-Gilles (azimut, 129° 43′ 24″); II. Base de la croix du clocher de Saint-Paul (cathédrale) (azimut, 135° 0′ 12″); III. Base de la croix du clocher de la Préalle (azimut, 321° 38′ 22″).

Pointés de l'aiguille et des repères :

24 août 1903, soir.

	I.	II.	III.
	284ᵍ42 84ᵍ40	78ᵍ52 78ᵍ52	71ᵍ15 71ᵍ14
Moyenne.	84ᵍ41	52ᵍ78	71ᵍ15
	75° 58′ 8″	70° 40′ 5″	64° 2′ 6″
Azimut	129 43 24	135 0 12	321 38 22
Lecture du méridien	25° 41′ 32″	25° 40′ 17″	25° 40′ 28

Moyenne . . . . . 25° 40′ 46″.

25 août 1903, soir.

	I.	II.	III.
	284ᵍ48 84ᵍ48	78ᵍ50 78ᵍ50	71ᵍ22 71ᵍ23
	84 49 84 49		
	84 43		
Moyenne.	84ᵍ47	78ᵍ50	71ᵍ22
	76° 1′ 23″	70° 39′ 0″	64° 5′ 53″
Azimut	129 43 24	135 0 12	321 38 22
Lecture du méridien	25° 44′ 47″	25° 39′ 12″	25° 44′ 25″

Moyenne . . . . . 25° 42′ 45″.

Enfin, de nouvelles observations en ces trois mêmes points furent encore prises à l'aide d'une grande boussole de mine à limbe amovible, qui avait été réglée approximativement sur les indications du barreau aimanté de l'Observatoire de Cointe. Voici les résultats de ces déterminations :

Observations à la boussole de mine n° 2.

Cointe. — 28 août 1903.

Station : salle magnétique de l'Observatoire.

Repère : angle du milieu de la grande cheminée, à l'ouest de la maison n° 54, rue du Batty, à Cointe.

Pointés du repère à 11 h. 30 m.

Lunette à droite. . . 342° 8′ Lunette à gauche. . . 161°43′

Moyenne . . . . . 341°56′

Azimut de repère 4 40

346°36′

Nord magnétique 13 25

Liége. — 28 août 1903.

Station : pilier du parc d'Avroy.

Repère : base de la croix du clocher de Sainte-Walburge.

Pointés du repère à 12 h.

Lunette à droite. . . 346°19′ Lunette à gauche. . . 165°56′

Moyenne . . . . . 346° 7′

Nord magnétique 13 53

Vottem.

Station : prairie au nord du siège de Gérard-Cloes, à Vottem.

Repères : I. Clocher de Saint-Gilles; II. Clocher de la cathédrale; III. Clocher de la Préalle.

Pointés des repères à 17 h. 30 m.

	I.	II.	III.
Lunette à droite. . . .	116°15′	121°36′	308° 6′
Lunette à gauche . . .	295 57	301 18	127 54
Moyenne	116° 6′	121°27′	308° 0′
Azimut du repère . . .	129 43	135 0	321 38
Nord magnétique . . .	13°37′	13°33′	13°38′

Elles donnent : différence Liége-Cointe, 28′; différence Liége-Vottem, 17′.

En résumé, les trois instruments qui ont servi jusqu'à présent ont indiqué sensiblement les mêmes écarts, comme il résulte du tableau suivant :

Différence.	Boussole n° 1.	Boussole n° 2.	Théodolite de Breithaupt.
Liége-Cointe	24′	28′	25′
Liége-Vottem.	17	17	15

L'accord entre ces valeurs est remarquable. Il fut encore confirmé dans la suite, comme on le verra plus loin.

En ce qui concerne la station au parc d'Avroy, on aurait pu attribuer la déviation de l'aiguille aimantée à la présence au nord-est et au sud-est de deux réverbères en fonte; cependant leur distance à environ 30 mètres du pilier et leurs positions quasi symétriques par rapport à ce dernier me firent d'abord rejeter cette hypothèse.

D'ailleurs, une détermination prise dans la suite à 34 mètres au nord donna la même déclinaison qu'au pilier.

Mais je crus un instant que le courant électrique du tram qui

passe au boulevard d'Avroy, à 150 mètres environ du pilier, pouvait exercer une influence. Je savais que le courant n'était établi sur la ligne qu'à 5 h. 55 m. du matin; j'observai, le 19 août, au parc d'Avroy, de 5 h. 10 m. à 6 h. 20 m., en espaçant mes pointés de trois en trois minutes environ. Voici les résultats obtenus :

19 août 1903.

Station : pilier du parc d'Avroy.

Repère : base de la croix du clocher de Sainte-Walburge (nord vrai).

Pointés de l'aiguille et du repère de 5 h. 12 m. à 6 h. 18 m.

28ᵍ76	28ᵍ69	28ᵍ69	28ᵍ71	28ᵍ77	28ᵍ74	28ᵍ76	28ᵍ71	28ᵍ72
	28 71	28 77	28 73	28 74	28 73	28 70	28 73	

Moyenne . . . . . 28ᵍ73 = 25°51′25″

Comme on le voit, aucune influence ne s'est manifestée pendant les observations et, si l'on tient compte des variations diurnes de l'aiguille aimantée, la moyenne 25° 51′ 25″ s'accordera sensiblement avec la valeur trouvée le jour précédent.

A Cointe, deux nouvelles stations furent d'abord choisies, l'une à 100 mètres au sud-ouest de la salle magnétique, l'autre à 100 mètres au nord de la salle méridienne, toutes les deux dans des prairies. Elles donnèrent respectivement des différences de dix et cinq minutes comparativement à la valeur trouvée dans la salle magnétique.

Ce résultat inattendu me montrait davantage la nécessité de multiplier les points d'observation, lorsque M. Bodson, conducteur des travaux à l'administration de la ville de Liége, me signala une déviation singulière de l'aiguille aimantée qui s'était manifestée au cours d'une opération, en procédant au tachéomètre par coups d'avant et coups d'arrière, dans un quartier assez désert situé à l'ouest de la ville, rue Boule-Boule, où aucune cause apparemment ne semblait devoir produire l'effet observé. Je me rendis au lieu indiqué et y constatai la présence de schistes calcinés appartenant au terris d'une ancienne exploitation houillière.

Le 1er septembre, après avoir choisi deux points, l'un au-dessus du terris, l'autre en dessous à environ 100 mètres, presque à l'intersection de la rue du Laveu et de la rue Boule-Boule, j'y observai les directions de l'aiguille aimantée qui différèrent de 36′.

Cette constatation m'engagea, tout en continuant mes premières recherches, à renouveler plusieurs fois dans la suite l'expérience sur de nouveaux terris.

Les observations qui suivent s'étendent à dix-sept stations qui ont été reportées avec des numéros d'ordre, par leur longitude et leur latitude, sur la carte annexée au présent travail (fig. 1).

Les numéros de 1 à 12 se rapportent aux stations que nous présumons à l'abri de toute influence extérieure; les autres, de 13 à 17, sont des terris.

Les déterminations furent prises à l'aide du petit théodolite de Breithaupt dont le déclinatoire avait été réglé, au préalable, sur les indications du magnétomètre de l'Observatoire de Cointe, de telle sorte que la lecture du méridien astronomique sur le cercle horizontal représentait approximativement la déclinaison magnétique absolue. Comme ce réglage n'a pu se faire que d'une façon approchée, cette lecture est désignée dans nos tableaux sous le nom de *déclinaison relative*. Elle s'obtient, comme nous savons, en amenant d'abord l'extrémité nord de l'aiguille devant un trait marqué sur le déclinatoire, puis en dirigeant l'axe optique de la lunette sur un repère éloigné dont l'azimut est déterminé astronomiquement.

L'azimut astronomique du repère a généralement été conclu d'un assez grand nombre de pointés des bords inférieur et supérieur du Soleil, effectués avec le même théodolite de Breithaupt, excepté le 27 août 1903, où il fut employé concurremment avec un théodolite de Negretti donnant les 20″ aux verniers. L'accord entre les valeurs fournies par ces deux instruments fut d'ailleurs parfait.

Dans les pointés des bords du Soleil on a alterné, comme il convient, les positions de l'instrument.

Les lectures azimutales ont toujours été faites au même vernier : il en résulte qu'elles diffèrent d'environ 180° suivant les positions, cercle à droite et cercle à gauche de l'instrument, positions que

nous n'avons pas cru, pour cette raison, devoir renseigner dans nos tableaux. De même, on a omis dans les lectures du cercle vertical l'indication des bords supérieur ou inférieur du Soleil ; elle est, en effet, inutile si l'on combine deux à deux ou quatre à quatre, comme nous l'avons fait le plus souvent, dans l'ordre où elles sont rapportées, les lectures du cercle vertical, puisqu'on élimine ainsi la correction du demi-diamètre du Soleil.

L'heure a été prise à une montre de poche, vérifiée avant et après l'observation ; elle a servi uniquement à calculer la déclinaison du Soleil et pour cette raison n'est donnée dans les tableaux qu'à la minute près.

L'azimut du Soleil a été calculé par la formule connue

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z - \sin z \cos \varphi \cos A,$$

rendue ou non calculable par logarithmes. Dans ce dernier cas, on a fait usage des tables des logarithmes d'addition et de soustraction de Gauss, modifiées par Hoüel (1), qui simplifient de beaucoup les calculs.

Cointe.

Station : salle magnétique de l'Observatoire de Cointe.

Repère : angle du milieu de la cheminée à l'ouest de la maison n° 54, rue du Batty, à Cointe.

Pointés de l'aiguille et du repère :

27 août 1903, à 11 h. 30 m.

20ᵍ04	20ᵍ04	20ᵍ04	20ᵍ09	20ᵍ06	20ᵍ07	20ᵍ08	20ᵍ08

Moyenne	20ᵍ06 = 18° 3′ 14″
Azimut du repère	4 39 31
Déclinaison relative	13° 23′ 43″

(1) J. Hoüel, *Tables de Logarithmes à cinq décimales*. Paris, 1903, Gauthier-Villars, éditeur.

27 août 1903, à 16 h. 20 m.

20ᵍ08 20ᵍ08 19ᵍ59 19ᵍ59 20ᵍ04 20ᵍ05 20ᵍ08 20ᵍ09

Moyenne . . . . . 20ᵍ08 = 18° 4′ 19″
Azimut du repère 4 39 31

Déclinaison relative . . . . . 13° 24′ 48″

29 août 1903, à 10 h. 40 m.

20ᵍ02 20ᵍ01 20ᵍ04 20ᵍ02 20ᵍ04 20ᵍ04

Moyenne . . . . . 20ᵍ03 = 18° 1′ 37″
Azimut. 4 39 31

Déclinaison relative . . . . . 13° 22′ 1″

1er septembre 1903, à 11 h. 35 m.

20ᵍ03 20ᵍ10 20ᵍ04 20ᵍ10 20ᵍ15 20ᵍ10

Moyenne . . . . . 20ᵍ09 = 18° 4′ 52″
Azimut du repère 4 39 31

Déclinaison relative . . . . . 13° 24′ 21″

1er septembre 1903, à 15 h. 40 m.

20ᵍ03 20ᵍ05 20ᵍ11

Moyenne . . . . . 20ᵍ06 = 18° 3′ 14″
Azimut du repère 4 39 31

Déclinaison relative . . . . . 13° 23′ 43″

8 septembre 1903.

19ᵍ97 19ᵍ97 20ᵍ02 20ᵍ00

Moyenne . . . . . 19ᵍ99 = 17° 59′ 28″
Azimut du repère 4 39 31

Déclinaison relative . . . . . 13° 19′ 47″

9 septembre 1903, à 16 h.

20ᵍ10 19ᵍ95 20ᵍ04 20ᵍ07 20ᵍ00 20ᵍ03 19ᵍ95 20ᵍ03

Moyenne . . . . . 20ᵍ02 = 18° 1′ 4″
Azimut du repère 4 39 31

Déclinaison relative . . . . . 13° 21′ 30″

26 septembre 1903.

20ᵍ12	20ᵍ12	20ᵍ12	20ᵍ12	20ᵍ14	20ᵍ20	20ᵍ16	20ᵍ20
20 22	20 23	20 14	20 19	20 12	20 18	20 10	20 08

Moyenne . . . . . 20ᵍ15 = 18° 8′ 6″
Azimut du repère . . . . . — 4 39 31
Déclinaison relative . . . . . 13°28′35″

1ᵉʳ octobre 1903, à 9 h.

20ᵍ00	20ᵍ06	20ᵍ04	20ᵍ07	20ᵍ00	20ᵍ02	20ᵍ07	20ᵍ01	20ᵍ05	20ᵍ03

Moyenne . . . . . 20ᵍ04 = 18° 1′53″
Azimut du repère 4 39 31
Déclinaison relative . . . . . 13°22′22″

1ᵉʳ octobre 1903, à 11 h. 15 m.

20ᵍ09	20ᵍ13	20ᵍ13	20ᵍ03	20ᵍ13	20ᵍ13	20ᵍ07	20ᵍ04	20ᵍ15	20ᵍ11

Moyenne . . . . . 20ᵍ10 = 18° 5′27″
Azimut du repère 4 39 31
Déclinaison relative . . . . . 13°25′56″

2 octobre 1903, à 12 h.

20ᵍ21	20ᵍ18	20ᵍ14	20ᵍ19	20ᵍ15	20ᵍ12	20ᵍ10	20ᵍ06	20ᵍ13	20ᵍ12

Moyenne . . . . . 20ᵍ14 = 18° 7′34″
Azimut du repère 4 39 31
Déclinaison relative . . . . . 13°28′ 0″

3 octobre 1903, à 11 h. 30 m.

20ᵍ14	20ᵍ20	20ᵍ12	20ᵍ13	20ᵍ10	20ᵍ13	20ᵍ13	20ᵍ14	20ᵍ11	20ᵍ14

Moyenne . . . . . 20ᵍ13 = 18° 7′14″
Azimut du repère 4 39 31
Déclinaison relative . . . . . 13°27′43″

3 octobre 1903, à 11 h. 35 m.

20ᵍ08	20ᵍ08	20ᵍ14	20ᵍ16	20ᵍ14	20ᵍ13	20ᵍ14	20ᵍ12	20ᵍ08

Moyenne . . . . . 20ᵍ12 = 18° 6′29″
Azimut du repère 4 39 31
Déclinaison relative . . . . . 13°26′58″

6 octobre 1903, à 11 h.

20ᵍ20 20ᵍ09 20ᵍ18 20ᵍ16 20ᵍ15 20ᵍ04 20ᵍ09 20ᵍ11 20ᵍ18 20ᵍ11

Moyenne . . . . . 20ᵍ13 = 18° 7′ 1″
Azimut du repère 4 39 31
Déclinaison relative . . . . . 13° 27′ 30″

LIÉGE.

Station : pilier du parc d'Avroy.
Repère : base de la croix du clocher de Sainte-Walburge.
Pointés de l'aiguille et du repère.

27 août 1903, à 18 h. 25 m.

15ᵍ38 15ᵍ39 15ᵍ34 15ᵍ28 15ᵍ31 15ᵍ37 15ᵍ40 15ᵍ33 15ᵍ38 15ᵍ33

Moyenne . . . 15ᵍ35 = 13°49′ déclinaison relative.

28 août 1903, à 14 h.

15ᵍ25 15ᵍ26 15ᵍ28 15ᵍ35 15ᵍ27 15ᵍ38 15ᵍ25 15ᵍ34 15ᵍ27

Moyenne . . . 15ᵍ29 = 13°45′40″ déclinaison relative.

10 septembre 1903, à 10 h. 45 m.

15ᵍ28 15ᵍ35 15ᵍ36 15ᵍ29 15ᵍ39 15ᵍ33

Moyenne . . . 15ᵍ33 = 13°47′49″ déclinaison relative.

Repère : signal sur la station à 34 mètres au nord du pilier.
Pointés de l'aiguille et du repère à 10 h. 15 m.

15ᵍ50 15ᵍ55 15ᵍ47 15ᵍ56 15ᵍ57 15ᵍ49

Moyenne . . . . . 15ᵍ52 = 13° 58′ 5″
Azimut du repère 0 6 40
Déclinaison relative . . . . . 13° 51′ 25″

LIÉGE. — 10 septembre 1903, matin.

Station : parc d'Avroy à 34 mètres au nord du pilier.
Repère : signal au centre du pilier.

$$\left.\begin{matrix} 215ᵍ50 \\ 15\ 50 \end{matrix}\right\} 15ᵍ50$$

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
9h 9m	60g 28	163g 62
9 12	339 54	364 63
9 24	341 22	368 20
9 27	58 64	169 23
9 29	57 86	169 88
9 31	341 80	370 56
9 33	342 60	371 21
9 36	57 70	171 88
9 41	56 60	173 50
9 42	343 00	374 10
9 44	343 72	374 56
9 46	56 60	175 22
9 47	55 68	175 70
9 49	343 70	376 36
9 51	344 92	376 89
9 53	55 88	177 53

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix} 29^g 50 \\ 15\ 50 \end{matrix}\right\} 15^g 50$$

Calcul.

Observations.	Z	δ	A	Nord géographique.
1	54° 32′ 15″	5° 21′ 15″	46° 33′ 35″	13° 49′ 4″
2	54 10 9	5 21 15	45 41 0	13 51 10
9-12	50 58 35	5 19 50	36 56 10	13 50 48
			Moyenne . . .	13° 50′ 20″

Méridien magnétique.

Repère : signal au centre du pilier.
Pointés de l'aiguille et du repère.

	215g 50	15g 52	15g 49	
Moyenne		15g 50	=	13° 57′ 0″
Repère				13 57 0
Différence			=	0 0 0
Nord géographique				13 50 20
Déclinaison relative				13° 50′ 20″

Vottem. — 28 août 1903.

Station : prairie au nord du siège du charbonnage de Gérard-Cloes.

Repère : base de la croix du clocher de Saint-Gilles.

Pointés de l'aiguille et du repère à 17 h.

70ᵍ90 70ᵍ85 70ᵍ89 70ᵍ88 70ᵍ89 70ᵍ80 70ᵍ89 70ᵍ88 70ᵍ92 70ᵍ94

Moyenne . . . . . 70ᵍ87 = 63° 47′

Azimut du repère . . . . . 129 43 20″

Déclinaison relative. . . . . 13° 30′ 20″

Repère : base de la croix du clocher de Saint-Paul (cathédrale).

Pointés de l'aiguille et du repère à 17 h.

65ᵍ03 64ᵍ99 65ᵍ02

Moyenne. . . . . 65ᵍ01 = 58° 30′ 30″

Azimut du repère 135 0 10

Déclinaison relative. . . . . 13° 30′ 40″

Repère : base de la croix du clocher de la Préalle.

Pointés de l'aiguille et du repère.

257ᵍ64 257ᵍ60 257ᵍ64

Moyenne . . . . . 257ᵍ62 = 231° 51′ 30″

Azimut du repère 321 38 20

Déclinaison relative. . . . . 13° 29′ 50″

Moyenne : 13° 30′ 15″

Cointe. — 27 août 1903, matin.

Latitude . . . . . 50° 37′ 6″

Longitude 0ʰ 22ᵐ 17ˢ

Station : terrain des jeux à 100 mètres au sud-ouest de la salle magnétique.

Repères : I. Base de la croix du clocher de Lize.

$$\left.\begin{matrix} 62° 14′ 45″ \\ 242\ 14\ 50 \end{matrix}\right\} \quad 62° 14′ 47″5$$

II. Base de la croix du clocher du Sacré-Cœur.

$$\left.\begin{matrix} 179°35'25'' \\ 359\ 34\ 0 \end{matrix}\right\} 179°34'42''5$$

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
—	—	—
9h 17m	319° 48' 55''	323° 53' 0''
9 20	220 53 50	144 49 0
9 23	220 43 45	145 42 30
9 26	318 10 55	326 35 0
9 29	318 24 20	327 21 20
9 31	222 10 30	148 3 10
9 42	316 58 0	331 20 50
9 45	223 37 10	152 5 20
9 47	223 50 20	152 46 0
9 50	316 11 20	333 39 0

Vérification des repères.

I.		II.	
—		—	
62° 16' 25''		179° 36' 10''	
242 15 5	62° 15' 45''	359 34 40	179° 35' 55''

Instruments : théodolite de Negretti et montre de poche.

Calcul.

Observations.	Z	δ	A	Nord géographique.
—	—	—	—	—
1- 4	49° 6' 35''	10° 26' 10''	47° 22' 20''	12° 37' 13''
3- 6	48 26 15	10 26 3	45 40 44	12 36 14
7-10	46 26 22	10 25 47	40 6 46	12 34 34
			Moyenne. . . .	12° 36' 0''

Azimut des repères.

Clocher de Lize . . .	62° 15' 16''	Clocher du Sacré-Cœur.	179° 35' 4''
Nord géographique . .	12 36	Nord géographique . .	12 36
Azimut	49° 39' 16''	Azimut	166° 59' 4''

Théodolite de Breithaupt.

29 août 1903.

Repères : I. Base de la croix du clocher de Lize.

$$\left.\begin{matrix}70.20\\270.20\end{matrix}\right\}\ 70.20$$

II. Base de la croix du clocher du Sacré-Cœur.

$$\left.\begin{matrix}400.59\\200.59\end{matrix}\right\}\ 400.59$$

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
—	—	—
3h 46m	72g 38	297g 04
3 49	327 72	97 81
3 52	326 70	98 32
3 55	73 20	298 96
3 58	74 36	299 77
4 1	325 64	100 58

Calcul.

Observations.	Z	δ	A	Nord géographique.
—	—	—	—	—
1-4	65° 32′ 40″	9° 39′ 20″	74° 42′ 34″	13° 31′ 16″
3-6	66 27 35	9 38 17	75 56 14	13 31 54
			Moyenne. . . .	13° 31′ 35″

Azimuts des repères.

Clocher de Lize. . .	180° 31′ 52″	Clocher du Sacré-Cœur. .	63° 10′ 48″
Nord géographique .	13 31 35	Nord géographique . . .	13 31 35
Azimut.	167° 0′ 17″	Azimut	49° 39′ 13″

Méridien magnétique.

27 août 1903, matin.

Repère : base de la croix du clocher de Lize.
Pointés de l'aiguille et du repère à 10 h.

70g26 70g28 70g19 70g26 70g26 70g27 70g26 70g23 70g22 70g26 70g25

Moyenne . . . . . 70g25 = 63° 13′ 30″
Azimut du repère. 49 39 15

Déclinaison relative . . . . . 13° 34′ 15″

Repère : base de la croix du clocher du Sacré-Cœur.
Pointés de l'aiguille et du repère à 10 h.

200ᵍ60	200ᵍ52	200ᵍ52	200ᵍ53	200ᵍ60	200ᵍ60	200ᵍ59	200ᵍ60
		200 56	200 54	200 60	200 59		

Moyenne . . . . . 200ᵍ57 = 180° 30′ 47″
Azimut du repère 166 59 40

Déclinaison relative. . . . . 13° 31′ 7″

29 août 1905.

Repère : base de la croix du clocher de Lize.
Pointés de l'aiguille et du repère de 15 h. 15 à 15 h. 35 m.

70ᵍ22	70ᵍ22	70ᵍ17	70ᵍ17	70ᵍ25	70ᵍ19	70ᵍ19	70ᵍ20

Moyenne. . . . . 70ᵍ20 = 63° 10′ 48″
Azimut du repère. 49 39 15

Déclinaison relative . . . . . 13° 31′ 33″

Repère : base de la croix du clocher du Sacré-Cœur.
Pointés de l'aiguille et du repère de 15 h. 15 à 15 h. 35 m.

200ᵍ56	200ᵍ56	200ᵍ62	200ᵍ60	200ᵍ60

Moyenne. . . . . 200ᵍ59 = 180° 31′ 52″
Azimut du repère 166 59 40

Déclinaison relative. . . . . 13° 32′ 12″

Cointe. — 31 août 1905, matin.

Latitude. . . . . 50° 37′ 6″ N.
Longitude . . . . . 0ʰ 22ᵐ 17ˢ E. Gr.

Station : milieu de la prairie située au nord de la salle méridienne de l'Observatoire de Cointe.

Repère.

$$\left.\begin{matrix} 275^g 18 \\ 75\ 18 \end{matrix}\right\} 75^g 18$$

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
9h 10m	342g 80	359g 50
9 14	57 10	161 13
9 16	56 22	161 84
9 18	343 52	362 62
9 20	344 38	363 21
9 23	55 88	164 02
9 26	55 06	164 65
9 28	344 74	365 72
9 31	345 72	366 70
9 35	54 48	167 84
9 37	53 64	168 47
9 40	346 14	369 68
9 43	347 06	370 56
9 46	53 20	171 52

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix} 75^g 18 \\ 275\ 18 \end{matrix}\right\} 75^g 18$$

Calcul.

Observations.	Z	δ	A	Nord géographique.
1-4	51° 5′ 35″	9° 1′ 31″	48° 16′ 40″	193° 25′ 15″
3-6	50 27 45	9 1 26	46 46 12	193 23 53
7-10	49 18 35	9 1 16	43 50 0	193 26 25
11-14	48 5 7	9 1 16	40 24 44	193 27 26
			Moyenne . . .	193° 25′ 45″

Méridien magnétique.

Repère.

Pointés de l'aiguille et du repère à 9 h. 50 m.

75g23 75g26 75g19 75g20 75g19 75g20

Moyenne	75g21	= 67° 41′ 20″
Repère	75 18	= 67 39 43
Différence		+ 0° 1′ 37″
Nord géographique		13 25 45
Déclinaison relative		13° 27′ 22″

Liége. — 1er septembre 1903, matin.

Latitude. . . . . 50°37'50"
Longitude . . . . . 0h22m12s E. Gr.

Station : prairie à l'angle des rues du Laveu et Boule-Boule.

Repère : base de la croix du clocher de l'église Saint-Paul de Liége (cathédrale).

Cercle vertical à droite. 267g92
Cercle vertical à gauche . . . . . 67 92 } 267g92

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle horizontal.
—	—	—
9h13m	343g16	361g49
9 16	57 04	162 52
9 19	56 18	163 20
9 22	343 58	364 10
9 24	344 46	364 80
9 28	55 58	166 14
9 34	54 24	168 26
9 38	345 44	369 02
9 39	346 24	369 57
9 42	54 00	170 66
9 44	53 08	171 60
9 49	346 74	372 98
9 52	347 60	374 93
9 56	52 14	175 48

Vérification du repère.

267g92
67 93 } 267g92

Calcul.

Observations	Z.	δ	A.	Nord géographique.
—	—	—	—	—
1- 4	50°58'35"	8°39'53"	47°0'10"	13°32'27"
7-10	48 44 34	8 39 35	41 7 42	13 34 11
			Moyenne. . .	13°33'19"

Méridien magnétique.

Repère : base de la croix du clocher de l'église Saint-Paul de Liége (cathédrale).

Pointés de l'aiguille et du repère à 10 h.

67ᵍ93 67ᵍ98 68ᵍ02 67ᵍ96 67ᵍ97 67ᵍ95

Moyenne	67ᵍ97 =	61°10′23″
Repère	67 92	61 7 40
Différence . . .	+	2 43
Nord géographique		13 33 19
Déclinaison relative		13°36′ 2″

Liége. — 1er septembre 1903, soir.

Latitude.	50° 37′ 50″
Longitude	0h 22m 42s E. Gr.

Station : prairie au-dessus d'un vieux terris, rue Boule-Boule.

Repère : base de la croix du clocher de Saint-Gilles.

$$\left.\begin{matrix}212^g00\\12\ 00\end{matrix}\right\} 12^g00$$

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
17h 16m	311ᵍ42	116ᵍ00
17 18	89 52	316 47
17 20	89 18	316 82
17 22	309 86	117 23
17 24	310 10	117 65
17 26	90 78	318 01
17 27	90 42	318 30
17 29	308 54	118 81

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix}211^g98\\11\ 98\end{matrix}\right\} 11^g93$$

Calcul.

Observations.	Z.	δ	A.	Nord géographique.
1-4	80°30′18″	8°33′00″	91°56′20″	13°3′28″
5-8	81 40 40	8 32 11	93 20 14	13 2 2
			Moyenne. . .	13°2′45″

Méridien magnétique.

Repère : base de la croix du clocher de Saint-Gilles.
Pointés de l'aiguille et du repère à 17 h. 50 m.

12ᵍ00	11ᵍ93	11ᵍ94	11ᵍ95	11ᵍ91

Moyenne	=	10° 45′ 18″
Repère		10 47 28
Différence. . .	—	2 10
Nord géographique.		13 2 45
Déclinaison relative		13° 0′ 35″

Liége. — 2 septembre 1903, matin.

Latitude.	50° 37′ 15″
Longitude	0ʰ 22ᵐ 16ˢ. E. Gr.

Station : extrémité sud du nouveau boulevard.
Repère : base de la croix du clocher de l'église Saint-Paul de Liége (cathédrale).

$$\left.\begin{matrix} 29ᵍ47 \\ 229\ 47 \end{matrix}\right\} 29ᵍ47$$

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
—	—	—
7ʰ58ᵐ	68ᵍ32	140ᵍ76
8 1	331 50	341 44
8 3	332 48	342 04
8 6	67 72	142 69
8 7	66 60	143 55
8 12	333 28	344 24
8 14	334 26	344 89
8 17	65 90	145 62
8 19	65 00	146 20
8 21	334 78	346 80
8 23	335 68	347 35
8 26	64 50	148 03

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix} 29^{g}47 \\ 229\ 47 \end{matrix}\right\} 29^{g}47$$

Calcul.

Observations.	Z.	δ	A.	Nord géographique.
—	—	—	—	—
1-4	61°14′10″	8°18′29″	65°54′ 8″	13°26′28″
5-9	59 38 30	8 18 29	63 17 10	13 24 30
			Moyenne. . .	13°25′29″

Méridien magnétique.

Repère : base de la croix du clocher de l'église Saint-Paul de Liége (cathédrale).

Pointés de l'aiguille et du repère à 8 h. 30 m.

29g50	29g52	29g51	29g45	29g47

Moyenne	29g49	= 26°32′28″
Repère	29 47	26 31 23
Différence . . .	+	1 5
Nord géographique		13 25 29
Déclinaison relative		13°26′34″

Liége. — 7 septembre 1903, soir.

Latitude	50°37′30″
Longitude	0h22m43s. E. Gr.

Station : extrémité est du vieux terris du Bois d'Avroy.

Repère : base de la croix du clocher de l'église Saint-Paul de Liége (cathédrale).

$$\left.\begin{matrix} 249^{g}49 \\ 49\ 49 \end{matrix}\right\} 49^{g}49$$

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle horizontal
—	—	—
16h 36m	315g 26	106g 93
16 41	84 66	307 62
16 44	85 72	308 18
16 46	314 54	108 60
16 49	313 48	109 16
16 52	86 94	309 81
16 55	87 92	310 52
16 59	312 32	110 39

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix} 249g\,49 \\ 49\ 49 \end{matrix}\right\} 49g\,49$$

Calcul.

Observations.	Z.	δ	A.	Nord géographique.
—	—	—	—	—
1-4	76° 42′ 0″	6° 20′ 53″	83° 54′ 54″	13° 7′ 55′′
3-6	77 36 48	6 20 50	84 53 8	13 9 38
			Moyenne. . .	13° 8′ 47″

Méridien magnétique.

Repère : base de la croix du clocher de l'église Saint-Paul de Liége (cathédrale).

Pointés de l'aiguille et du repère à 17 h.

49g52	49g53	49g47	49g42	49g50

Moyenne	49g49 =	44° 32′ 28″
Repère	49 49 =	44 32 28
Différence . . .		0 0 0
Nord géographique		13 8 47
Déclinaison relative		13° 8′ 47″

Liége. — 8 septembre 1903, matin.

Latitude. . . . . 50° 37′ 30″
Longitude 0h 22m 13s

Station : extrémité nord du nouveau boulevard.
Repère : base de la croix du clocher de Saint-Gilles.

$$\left.\begin{matrix} 360^g 34 \\ 160\ 34 \end{matrix}\right\} 360^g 34$$

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
—	—	—
9h 7m	339g 50	361g 56
9 11	59 36	162 84
9 13	59 72	163 42
9 15	341 20	364 27
9 18	340 86	364 88
9 21	58 16	165 77
9 23	58 48	166 49
9 25	342 34	367 18

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix} 360^g 34 \\ 160\ 34 \end{matrix}\right\} 360^g 34$$

Calcul.

Observations.	Z	δ	A	Nord géographique.
—	—	—	—	—
1-4	53° 39′ 37″	6° 3′ 29″	46° 29′ 6″	13° 12′ 11″
5-8	52 32 34	6 5 20	43 43 14	13 11 33
			Moyenne . . .	13° 11′ 52″

Méridien magnétique.

Repère : base de la croix du clocher de Saint-Gilles.
Pointés de l'aiguille et du repère à 9 h. 25 m.

360ᵍ56 360ᵍ60 360ᵍ66 360ᵍ64 360ᵍ62 360ᵍ62

Moyenne	360ᵍ62 =	324° 33′ 29″
Repère	360 34 =	324 18 22
Différence	+	15′ 7″
Nord géographique . . .		13 11 52
Déclinaison relative. . . .		13° 26′ 59″

José. — 24 septembre 1903, matin.

Latitude.	50° 38′ 2″
Longitude	0ʰ 23ᵐ 6ˢ E. Gr.

Station : prairie, parcelle n° 754, commune de Battice, section C, propriété de MM. Petit-Bois frères.

Repère : base de la croix du clocher de Herve.

$$\left.\begin{matrix} 95ᵍ84 \\ 295\ 83 \end{matrix}\right\} 95ᵍ835$$

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
—	—	—
9ʰ 12ᵐ	65ᵍ02	168ᵍ93
9 14	334 94	369 52
9 15	335 70	369 96
9 18	64 54	170 86
. . . . .	. . . . .	. . . . .
9 30	337 28	374 38
9 32	63 14	174 80
9 33	62 40	174 25
9 34	337 16	375 76
9 36	337 90	376 21
9 37	62 54	176 64
9 39	61 82	177 05
9 40	337 74	377 63
9 44	338 72	378 88
9 46	61 72	179 28
9 47	61 06	179 66
9 48	338 52	380 19

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix} 295^{g}83 \\ 95\ 83 \end{matrix}\right\} 95^{g}83$$

Calcul.

Observations.	Z	δ	A	Nord géographique.
—	—	—	—	—
2	58° 18′ 42″	−0° 3′ 24″	41° 1′ 50″	13° 35′ 55″
3	58 9 37	0 3 28	40 38 10	13 36 0
4	57 50 36	0 3 29	39 48 20	13 34 46
5	56 44 9	0 3 53	36 41 54	13 38 25
6	56 34 54	0 3 53	36 14 50	13 34 2
7	56 26 54	0 3 53	35 51 6	13 34 36
8	56 18 44	0 3 53	35 26 25	13 37 27
9	56 10 42	0 3 55	35 2 10	13 37 30
10	56 2 30	0 3 55	34 36 45	13 35 19
11	55 55 34	0 3 55	34 15 0	13 35 42
12	55 47 22	0 3 55	33 48 45	13 40 46
13	55 26 22	0 3 57	32 39 40	13 39 11
14	55 18 12	0 3 57	32 12 15	13 33 22
15	55 14 29	0 3 57	31 59 40	13 41 18
16	55 5 12	0 3 57	31 27 20	13 37 36
			Moyenne.	13° 36′ 48″

Méridien magnétique.

Repère : base de la croix du clocher de Herve.
Pointés de l'aiguille et du repère à 9 h. 55 m.

95ᵍ97 95ᵍ94 95ᵍ87 95ᵍ88 95ᵍ92 95ᵍ90 95ᵍ90 95ᵍ91 95ᵍ93 95ᵍ87

Moyenne	95ᵍ908 = 86° 19′ 8″	
Repère	95 830 = 86 14 49	
Différence		+ 4′ 19″
Nord géographique.		13 36 48
Déclinaison relative		13° 41′ 7″

Xhawirs. — 24 septembre 1903, soir.

Latitude . . . . . 50° 37′ 30″
Longitude 0h 23m 1s

Station : terris du charbonnage de Herve-Wergifosse.
Repère : base de la croix du clocher de Xhendelesse.

$$\left.\begin{matrix} 384^{g}095 \\ 184\ 095 \end{matrix}\right\} 184^{g}095$$

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
15h 44m	81g46	291g77
15 45	317 64	92 16
15 46	317 98	92 53
15 48	82 88	292 90
15 49	82 44	293 12
15 50	316 74	93 39
15 51	317 22	93 59
15 52	83 56	293 84

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix} 184^{g}095 \\ 384\ 090 \end{matrix}\right\} 184^{g}09$$

Calcul.

Observations.	Z	δ	A	Nord géographique.
1-4	74° 0′ 55″	− 0° 9′ 37″	69° 17′ 24″	13° 48′ 58″
5-8	74 45 54	0 9 42	70 20 19	13 47 51
			Moyenne.	13° 48′ 25″

Méridien magnétique

Repère : base de la croix du clocher de Xhendelesse.
Pointés de l'aiguille et du repère à 16 h.

384g20 384g14 384g13 384g23 384g22 384g13 384g23
384 24 384 26 384 22

Moyenne . . . . . 184g20 = 165° 46′ 48″
Repère . . . . . 184 09 = 165 40 52

Différence. . . . + 0 5 56
Nord géographique 13 48 25

Déclinaison relative. . . . . 13° 54′ 21″

Xhawirs. — 24 septembre 1903, soir.

Latitude . . . . . 50° 37′ 30″
Longitude 0h 23m 4s

Station : prairie Dethier, au pied du terris du charbonnage de Herve-Wergifosse.

Repère : base de la croix du clocher de Manaihaut.

$$\left.\begin{matrix} 317^g195 \\ 117\ 190 \end{matrix}\right\} 317^g19$$

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
—	—	—
16h29m	89g24	302g08
16 30	309 98	102 27
16 31	310 44	102 47
16 32	90 32	302 71
16 33	89 86	302 84
16 34	309 32	103 15
16 35	309 74	103 34
16 36	91 08	303 68

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix} 317^g18 \\ 117\ 17 \end{matrix}\right\} 317^g185$$

Calcul.

Observations.	Z	δ	A	Nord géographique.
—	—	—	—	—
1-4	80°54′ 1″	-0°10′ 22″	78°27′ 51″	13°40′ 40″
5-8	81 31 24	-0 10 23	79 15 23	13 40 7
			Moyenne.	13°40′ 24″

Méridien magnétique.

Repère : base de la croix du clocher de Manaihaut.
Pointés de l'aiguille et du repère à 16 h. 40 m.

117ᵍ17	117ᵍ14	117ᵍ07	117ᵍ18	117ᵍ25	117ᵍ20	117ᵍ19	117ᵍ20	117ᵍ13	117ᵍ18

Moyenne.	117ᵍ17	= 105° 27′ 11″
Repère	117 184	= 105 27 44
Différence		— 0 33
Nord géographique		13 40 24
Déclinaison relative		13° 39′ 51″

Jupille. — 25 septembre 1903, matin.

Latitude.	50° 39′ 0″
Longitude	0ʰ 23ᵐ 37ˢ E. Gr.

Station : nouveau terris de la Violette.
Repère : base de la croix du clocher de Jupille.

$$\left.\begin{matrix}280ᵍ51\\80\ 50\end{matrix}\right\} 80ᵍ505$$

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
—	—	—
8° 34ᵐ	330ᵍ06	358ᵍ30
8 35	70 32	158 72
8 36	69 52	159 12
8 38	330 08	359 53
. . . . .	. . . . .	. . . . .
8 47	331 87	362 11
8 50	68 40	162 76
8 52	67 54	163 38
8 54	332 18	364 05

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix}80ᵍ50\\280\ 50\end{matrix}\right\} 80ᵍ50$$

Calcul.

Observations.	Z	δ	A	Nord géographique.
1–4	62°57′42″	-0°26′ 3″	50°31′ 4″	13°32′45″
5–8	61 12 0	0 26 17	46 49 30	13 35 33
			Moyenne.	13 34′ 9″

Méridien magnétique.

Repère : base de la croix du clocher de Jupille.
Pointés de l'aiguille et du repère à 9 h.

80ᵍ43 80ᵍ40 80ᵍ61 80ᵍ55 80ᵍ51 80ᵍ49 80ᵍ50 80ᵍ50 80ᵍ49

Moyenne.	80ᵍ497	= 72°26′50″
Repère	80 500	= 72 27 0
Différence		— 0 10
Nord géographique		13 34 9
Déclinaison relative		13°34′ 0″

Jupille. — 25 septembre 1903, matin.

Latitude . . . . . 50°39′ 0″
Longitude . . . . . 0ʰ23ᵐ37ˢ E. Gr.

Station : prairie derrière le siège du charbonnage de la Violette à Jupille.

Repère.

98ᵍ31 } 98ᵍ31
298 31 }

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
9ʰ25ᵐ	336ᵍ40	373ᵍ23
9 27	63 96	173 84
9 29	63 22	174 26
9 31	336 38	374 90
9 33	337 18	375 50
9 35	63 14	176 26
9 37	62 40	176 76
9 38	337 16	377 26

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix} 98^g305 \\ 298\ 30 \end{matrix}\right\} 98^g30$$

Calcul.

Observations.	Z	∂	A	Nord géographique.
—	—	—	—	—
1-4	57° 15′ 47″	0° 26′ 54″	36° 59′ 30″	13° 38′ 41″
5-8	56 32 32	0 27 1	34 50 20	13 38 22
			Moyenne.	13° 38′ 32″

Méridien magnétique.

Repère : base de la croix du clocher de Jupille.
Pointés de l'aiguille et du repère à 9 h. 40 m.

98g32 98g26 98g32 98g24 98g30

Moyenne.	98g288	= 88° 27′ 33″
Repère	98 31	= 88 28 44
Différence		— 1 11
Nord géographique		13 38 32
Déclinaison relative.		13° 37′ 21″

Jupille. — 25 septembre 1903, matin.

Latitude.	50° 39′ 0″
Longitude	0h 23m 37s E. Gr.

Station : sur l'ancien terris non brûlé du charbonnage de la Violette à Jupille.
Repère : base de la croix du clocher de Jupille.

$$\left.\begin{matrix} 90^g53 \\ 290\ 53 \end{matrix}\right\} 90^g53$$

Observation des bords inférieur et supérieur du Soleil.

Heure de Greenwich.	Cercle vertical.	Cercle azimutal.
—	—	—
10h 11m	339g 94	387g 16
10 13	59 28	188 38
10 15	59 78	188 92
10 17	340 98	389 70
10 19	340 50	390 28
10 21	58 76	190 92
10 22	59 24	191 47
10 24	341 46	392 16

Vérification du repère.

$$\left.\begin{matrix} 90^g 53 \\ 290\ 53 \end{matrix}\right\} 90^g 53$$

Calcul.

Observations.	Z	δ	A	Nord géographique.
—	—	—	—	—
1-4	53° 36′ 4″	−0° 27′ 38″	23° 48′ 50″	13° 29′ 56″
5-8	53 7 42	0 27 46	21 27 30	13 32 50
			Moyenne . . .	13° 31′ 23″

Méridien magnétique.

Repère : base de la croix du clocher de Jupille.
Pointés de l'aiguille et du repère à 10 h. 30 m.

90g62 90g55 90g57 90g53 90g50

Moyenne	90g 554 =	81° 29′ 55″
Repère	90 53 =	81 28 37
Différence	+	1 18
Nord géographique.		13 31 23
Déclinaison relative		13 32 41

L'erreur moyenne d'une détermination du méridien astronomique a été déduite des observations faites, le 24 septembre 1903, à José, dans la propriété de MM. Petit-Bois frères : elle s'élève à $\pm$ 1′ 30″ ; l'erreur moyenne des pointés de l'aiguille et du repère est du même ordre.

Il en résulte que l'erreur moyenne d'une déclinaison relative ne dépasserait pas $\pm 1'$. Ces résultats, qui s'appliquent évidemment aux déterminations faites en d'autres points, n'ont qu'une portée théorique; aussi n'admettrons nous comme bien établies que les différences de déclinaisons qui atteignent 5'.

Les déclinaisons magnétiques observées doivent subir deux corrections : l'une qui transforme les déclinaisons relatives en déclinaisons absolues; l'autre, à cause des variations diurnes de l'aiguille aimantée, qui ramène toutes les déclinaisons à une même époque.

La première correction résulte de cinq comparaisons faites entre les indications du théodolite de Breithaupt et du magnétomètre de l'Observatoire de Cointe; elles donnent :

DATE. 1903.	Théodolite de Breithaupt.	Magnétomètre de Gauss.	Différence.
29 août. . . 10h20m	13°22'	13°27'	+ 5'
1er octobre . 10 20	13 22.5	13 35	+ 12.5
2 — . 12 —	13 28	13 41	+ 13
3 — . 11 45	13 27.5	13 41	+ 13.5
5 — . 11 45	13 27	13 40	+ 13

La moyenne des écarts entre les indications du théodolite de Breithaupt et du magnétomètre est $+ 11' 4$.

C'est ce nombre que nous adopterons pour réduire les valeurs relatives de la déclinaison en valeurs absolues.

Toutefois, par suite de la discordance entre la valeur du 29 août 1903 et celles des 1er, 2, 3 et 5 octobre, cette correction reste quelque peu arbitraire. Cela suffirait à montrer combien il eut été désirable que j'eusse pu utiliser un instrument donnant directement la déclinaison magnétique absolue. Néanmoins, s'il existe quelque incertitude dans les valeurs absolues de nos déterminations, les différences constatées n'en subsistent pas moins tout entières. La seconde correction exige le concours d'un magnétographe fonctionnant pendant la durée des expériences. Grâce à l'extrême obligeance de M. G. Lecointe, Directeur scientifique de l'Observatoire royal de Belgique, nous avons pu profiter des indications du magnétographe d'Uccle pour les heures des observations.

Le tableau suivant contient dans ses différentes colonnes la déclinaison relative, la déclinaison absolue et la déclinaison absolue rapportée au 1er janvier 1903, en prenant pour valeur à Uccle, à cette époque, 14° 1′ 9.

LIEU.	Déclinaison relative.	Déclinaison absolue.	Déclinaison 1er janv. 1903.
Salle magnétique (Cointe).	13° 23′ 43″	13° 35′ 1	13° 29.8
Id.	13 24 48	13 36.2	13 34.6
Id.	13 22 1	13 33.4	13 33.2
Id.	13 24 21	13 35.7	13 32.3
Id.	13 23 43	13 35.1	—
Id.	13 19 47	13 31.2	—
Id.	13 21 30	13 32.9	—
Id.	13 28 35	13 40.0	—
Id.	13 22 22	13 33.8	—
Id.	13 25 56	13 37.3	13 33.2
Id.	13 28 0	13 39.4	13 34.0
Id.	13 27 43	13 39.1	13 34.1
Id.	13 26 58	13 38 3	13 33.5
Id.	13 27 30	13 38.9	13 32.4
Parc d'Avroy (Pilier)	13 49 0	14 0.4	—
Id.	13 45 40	13 57.1	—
Id.	13 47 49	13 59.2	13 54.5
Id.	13 51 25	14 3.0	—
Parc d'Avroy (34 mètres au nord du pilier). . .	13 50 20	14 1.7	13 57.0
Vottem (siège du charbonnage de Gérard-Cloes).	13 30 25	13 41.7	13 41.0
Cointe (100 mètres au sud-ouest de la salle magn.)	13 32 41	13 44.1	13 42.9
Id. id. id. . .	13 31 32	13 43.3	13 42.9
Cointe (100 mètres au nord de la salle méridienne)	13 27 22	13 38.8	13 37.5
Liége, rue Boule-Boule	13 36 2	13 47.4	13 43.3
Terris, rue Boule-Boule	13 0 35	13 12.0	13 11 6
Liége, extrémité sud du nouveau Boulevard . .	13 26 34	13 38.0	13 38.7
Terris du Bois d'Avroy	13 8 47	13 20.2	—
Liége, extrémité nord du nouveau Boulevard . .	13 26 59	13 38.3	—
José, propriété Petit-Bois.	13 41 7	13 52.5	13 48.8
Terris du charbonnage de Herve-Wergifosse . .	13 54 21	14 5.8	14 4.8
Xhawirs, prairie Dethier.	13 39 51	13 51.3	13 50.9
Nouveau terris de la Violette.	13 34 0	13 45.4	13 48.5
Jupille, prairie derrière la Violette.	13 37 21	13 49.0	13 50.9
Vieux terris de la Violette	13 32 41	13 44 1	13 42.3

Examinons d'abord l'influence des terris.

On constate que les plus fortes déviations sont dues aux deux terris *brûlés* de la rue Boule-Boule et du Bois d'Avroy.

Si l'on compare la déclinaison magnétique au terris non brûlé du charbonnage de Herve-Wergifosse à celles dans les prairies Dethier aux Xhawirs et Petit-Bois, à José, on constate un écart de 15′ environ : il est plus faible que le précédent.

A Jupille, j'ai opéré sur deux terris non brûlés, dont l'un (le nouveau terris de la Violette) n'avait guère plus de quarante jours d'existence, tandis que l'autre (le vieux terris de la Violette) avait plus de trente ans d'âge. Les déclinaisons sur ces terris sont respectivement 2′ et 8′ plus faibles que celle dans la prairie derrière la Violette qui semblait à l'abri de toute influence extérieure.

Selon toute probabilité, il faut chercher dans la constitution physique des corps qu'ils renferment la cause des déviations de l'aiguille aimantée par les terris. Les écarts plus grands que donnent les terris brûlés pourraient être attribués vraisemblablement à une aimantation due aux actions calorifiques. Je laisse à d'autres le soin de trancher cette question intéressante.

Quant aux déviations de la boussole qu'on ne peut attribuer à des causes extérieures, on peut les classer dans l'ordre suivant :

Tableau des déclinaisons.

Numéros de la carte.	LIEU.	Déclinaison.
1	Cointe, salle magnétique	13°33′.1
2	Cointe, prairie au nord de la salle méridienne	13 37.5
4	Liége, extrémité nord du nouveau Boulevard.	13 38.3
3	Liége, extrémité sud du nouveau Boulevard	13 38.7
7	Vottem, siège de Gérard-Cloes	13 41.0
5	Cointe (100 mètres au sud-ouest de la salle magnétique) . .	13 42.9
6	Liége, rue Boule-Boule	13 43.3
10	José, propriété Petit-Bois.	13 48.8
9	Xhawirs, prairie Dethier	13 50.9
8	Jupille, prairie au nord-est de la Violette	13 50.9
11	Liége, parc d'Avroy, pilier	13 54.8
12	Liége, parc d'Avroy (34 mètres nord du pilier)	13 57.0

Le fait le plus caractéristique qui ressort de l'examen de ce tableau c'est que, pour la généralité des points, les déclinaisons magnétiques vont en augmentant vers l'est, ce qui est contraire à une distribution régulière des éléments magnétiques. Alors que la différence des déclinaisons des points extrêmes de notre carte ne devrait guère atteindre 5′, elle dépasse au contraire 20′. La conclusion à tirer de ces observations, c'est que le bassin de Liége est une région d'anomalies magnétiques. Cette assertion n'étonnera nullement les géologues qui, depuis les travaux de Naumann sur la carte magnétique du Japon (1), se rallient de plus en plus à l'hypothèse que ces anomalies sont dues à la discontinuité des couches géologiques, puisque le bassin de Liége est, en effet, entrecoupé de failles importantes. Une carte magnétique complète du bassin pourrait seule jeter quelque lumière sur ce sujet à peine effleuré. C'est ce que je compte faire bientôt avec des instruments mieux appropriés, si les circonstances me le permettent.

(1) Dr Edmund Naumann, *Die Erscheinungen des Erdmagnetismus, etc.* Stuttgart, 1887.

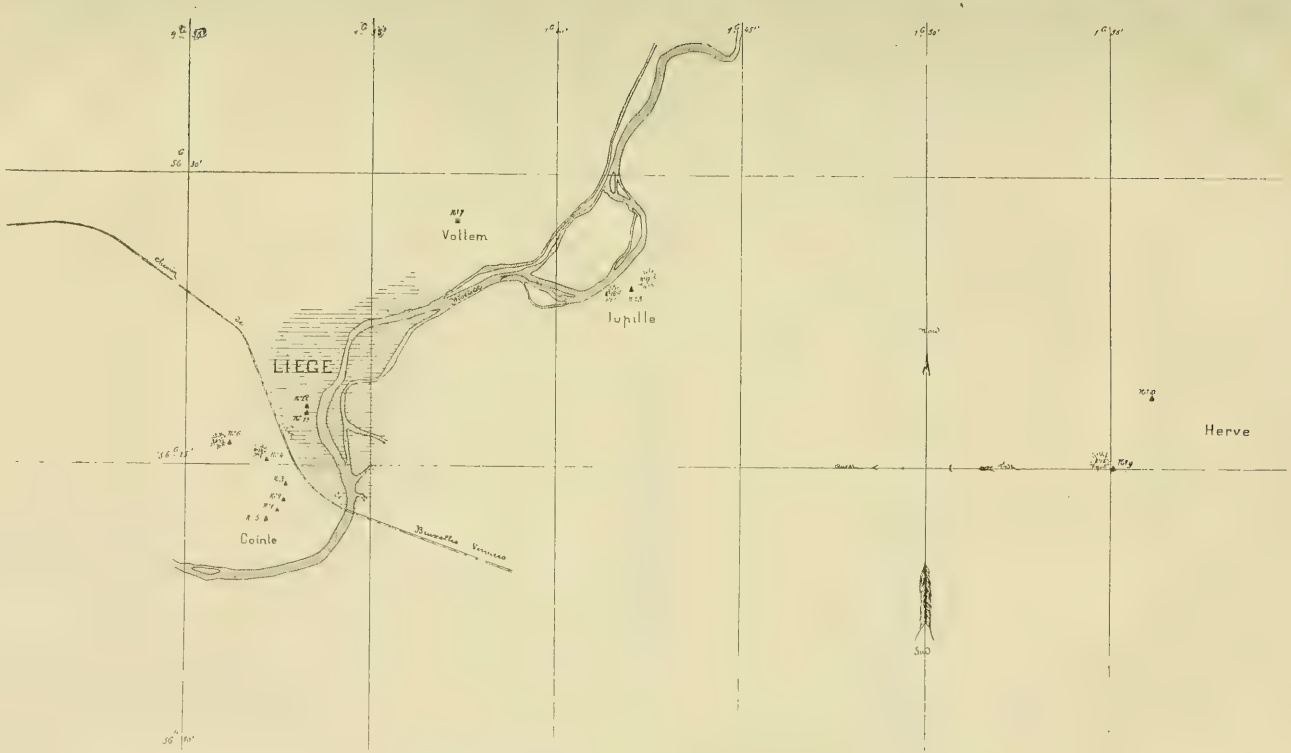


FIG. 1. — **Carte des environs de Liége et positions des stations.**

UN LIEU

DE

GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE

DÉMONTRÉ PAR

LES PROJECTIONS STÉRÉOGRAPHIQUES

PAR

G. CESÀRO

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

UN LIEU

DE

GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE

DÉMONTRÉ PAR

LES PROJECTIONS STÉRÉOGRAPHIQUES

Pour démontrer qu'un lieu géométrique de points situés sur une sphère est une circonférence de cercle, il suffit de démontrer que la projection stéréographique du lieu sur un tableau convenablement choisi est une droite, car alors la courbe considérée est l'intersection de la sphère avec le plan passant par la droite ainsi obtenue et par l'œil.

* * *

Ainsi, on sait que si l'on considère sur une sphère une suite de triangles sphériques ayant même base et même surface, le lieu des sommets est une circonférence de cercle. Cette propriété peut être démontrée, pour ainsi dire immédiatement, par l'emploi des projections stéréographiques :

Prenons pour plan d'horizon le grand cercle normal au diamètre passant par une extrémité A de la base (fig. 1), de sorte que l'œil est le point symétrique de A par rapport au centre de la sphère; soit AB la projection stéréographique de la base et ABC la projection de l'un des triangles répondant à la question. Le côté AC se projette suivant une droite et le côté BC est l'arc d'une circon-

férence coupant le cercle d'horizon suivant un diamètre mm', et passant, par conséquent, par un point fixe F situé sur AB, car

$$AF.AB = Am.Am' = R^2$$

et

$$AF = \frac{R^2}{AB}. \qquad (1)$$

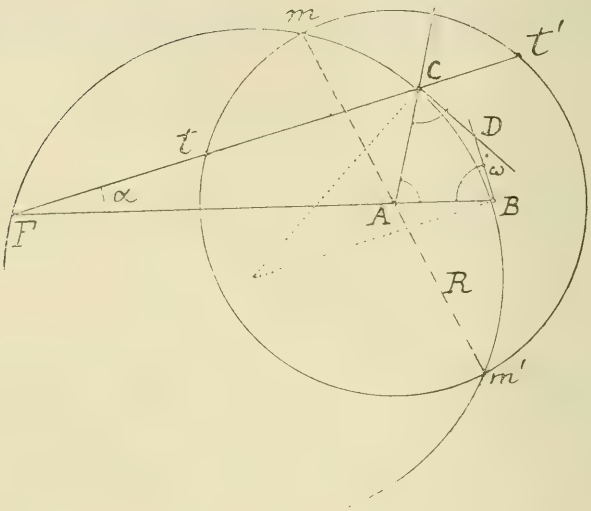


Fig. 1.

Les angles du triangle sphérique se projetant stéréographiquement en vraie grandeur, si l'on mène en B et C les tangentes au cercle mBm', on aura pour l'excès sphérique, mesure de la surface du triangle de l'espace,

$$2E = A + B + C - \pi = \omega;$$

ainsi l'angle ω est constant et égale l'excès sphérique. En joignant CF, comme α a pour mesure $\frac{1}{2}$ CB dans la circonférence mBm' et que l'arc CB y mesure au centre un angle ω, on a

$$\alpha = \frac{\omega}{2} = E.$$

Il s'ensuit que la projection C d'un point quelconque du lieu se trouve sur la droite passant par le point fixe F et faisant l'angle constant E avec AB; la projection stéréographique du lieu est donc une droite, et le lieu lui-même est la circonférence d'un petit cercle passant par l'œil et coupant le cercle d'horizon suivant la droite *tt'*.

Observons qu'à cause de (1) le point F n'est autre chose que la projection stéréographique de la seconde extrémité du diamètre de la sphère passant par le point B de l'espace; de sorte que le lieu considéré est une circonférence de petit cercle passant par les points de la sphère symétriques par rapport au centre des extrémités de la base constante.

* * *

On peut aussi démontrer que la projection stéréographique d'un lieu de la sphère est un cercle pour en conclure que le lieu lui-même est un cercle.

* * *

Appliquons cette méthode au lieu examiné ci-dessus. Soit ABC

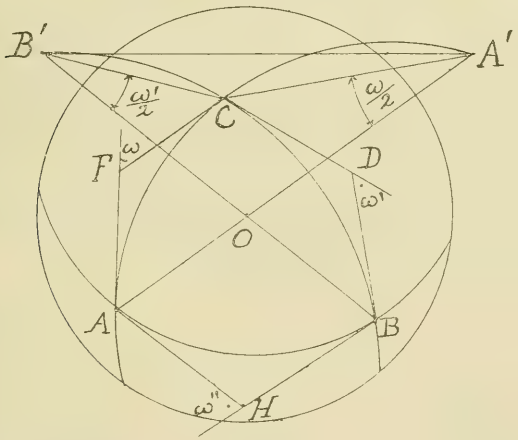


Fig. 2.

(fig. 2) la projection stéréographique d'un triangle sphérique, AB la projection du côté fixe. Les projections des deux autres

côtés sont des arcs de cercles AC, BC, passant respectivement par les points fixes A′, B′, obtenus en prenant

$$OA' = \frac{R^2}{a}, \quad OB' = \frac{R^2}{b},$$

R étant le rayon de la sphère. En menant en A, B, C les tangentes aux cercles qui passent par ces points, on a, pour la mesure de la surface du triangle sphérique,

$$2E = A + B + C - \pi,$$

A, B et C représentant des angles de l'hexagone AFCDBH; on en conclut

$$2E = \omega + \omega' + \omega''$$

et

$$\frac{\omega + \omega'}{2} = E - \frac{\omega''}{2} = \textit{constante}.$$

Comme

$$\widehat{CA'A} = \frac{\omega}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{CB'B} = \frac{\omega'}{2},$$

on voit que le point C se meut dans le triangle fixe A′B′O de manière que

$$\widehat{CB'O} + \widehat{CA'O} = \textit{constante};$$

il s'ensuit que l'angle B′CA′ a aussi une valeur constante et que, par conséquent, le lieu projeté est une circonférence de cercle passant par les points A′ et B′. Donc, etc.

* * *

La propriété inverse est susceptible d'une démonstration géométrique très simple :

Si l'on considère sur une sphère une suite de triangles sphériques ayant même base et dont les sommets sont situés sur une circonférence de petit cercle passant par les points symétriques des extrémités de cette base, tous ces triangles ont même surface.

En effet, soit (fig. 3) AB la base constante, ABC l'un des triangles considérés, A'CB' la circonférence de petit cercle sur laquelle se meut le sommet variable C, P le pôle de cette circonférence (*). Traçons les arcs de grand cercle PC, PA', PB'. Dans

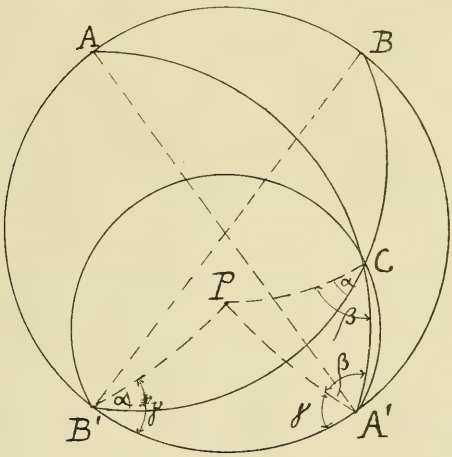


Fig. 3.

les triangles ABC, A'B'C, les angles C sont égaux; A' et B' sont respectivement les suppléments de A et B; de sorte qu'en observant que les triangles PCA', PCB', PA'B' sont isoscèles, on a :

$$A = \pi - A' = \pi - \beta - \gamma$$
$$B = \pi - B' = \pi + \alpha - \gamma$$
$$C = \beta - \alpha$$

et, en ajoutant,

$$2E = A + B + C - \pi = \pi - 2\gamma = \textit{constante}.$$

(*) On a supposé le pôle P extérieur au triangle A'B'C; la démonstration reste la même lorsque P est à l'intérieur de ce triangle.

AIRE

DU

TRIANGLE

FORMÉ SUR LA SPHÈRE

PAR TROIS CERCLES QUELCONQUES

PAR

G. CESÀRO

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

AIRE

DU

TRIANGLE

FORMÉ SUR LA SPHÈRE

PAR TROIS CERCLES QUELCONQUES (*)

Nous nous donnons chaque cercle par le rayon sphérique et par le pôle, la position réciproque des trois pôles étant fixée en se donnant le triangle sphérique qu'ils déterminent.

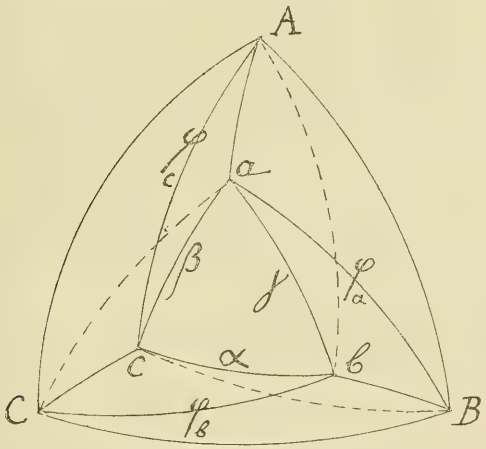


Fig. 1.

ABC (fig. 1) est le triangle dont il s'agit de calculer la surface, *abc* le triangle sphérique formé par les pôles, *a* étant le pôle de

(*) Voir WASTEELS, *Mathesis*, 1892, 2e sér., t. II, p. 105, et CESÀRO, *Sur l'emploi du calcul des probabilités en pétrographie* (MÉM. IN-4° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1895, t. LIII, pp. 50 à 52).

BC; les rayons sphériques des cercles BC, AC, AB seront désignés respectivement par φ_a, φ_b, φ_c; le triangle sphérique des pôles sera donné par ses côtés α, β, γ. La question est donc de *calculer la surface du triangle* ABC, *en fonction de* α, β, γ, φ_a, φ_b, φ_c.

Nous supposons que le rayon de la sphère égale l'unité.

Théorème. — Si S est l'aire du triangle formé sur la sphère par trois cercles quelconques et s l'aire du triangle sphérique formé par les pôles, on a

$$S - s = \Sigma(a\mathrm{BC}) - \Sigma(\mathrm{A}bc)\ (*).$$

En effet, la différence entre S et s se compose de trois quadrilatères tels que ABab, qui, décomposés chacun en deux triangles par les grands cercles diagonaux dessinés en trait plein, donnent

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}ab &= \mathrm{A}a\mathrm{B} + \mathrm{B}ba \\ \mathrm{BC}bc &= \mathrm{B}b\mathrm{C} + \mathrm{C}cb \\ \mathrm{AC}ac &= \mathrm{C}c\mathrm{A} + \mathrm{A}ac. \end{aligned} \qquad (1)$$

Mais les six triangles ci-dessus peuvent se grouper comme il suit, en ajoutant ceux qui ont respectivement pour côté commun Aa, Bb, Cc,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}a\mathrm{B} + \mathrm{A}ac &= c\mathrm{AB} - \mathrm{B}ac \\ \mathrm{B}b\mathrm{C} + \mathrm{B}ba &= a\mathrm{BC} - \mathrm{C}ab \\ \mathrm{C}c\mathrm{A} + \mathrm{C}cb &= b\mathrm{AC} - \mathrm{A}bc. \end{aligned} \qquad (2)$$

En ajoutant membre à membre les équations (1), et en tenant compte de (2), il vient :

$$S - s = \Sigma(a\mathrm{BC}) - \Sigma(\mathrm{A}bc), \qquad (3)$$

qui est la relation à démontrer.

On voit facilement que cette relation résout le problème : Abc est un triangle sphérique, aBC est un *secteur de zone* à une base,

(*) Nous désignons la *surface* aBC par aBC; un angle sera représenté par $\widehat{a\mathrm{BC}}$.

de rayon sphérique φ_a, dont l'angle $BaC = \omega$ se calcule aisément en fonction des données, secteur dont l'aire est

$$\omega(1 - \cos\varphi_a).$$

On peut obtenir une formule simple en opérant comme il suit : on a, pour les différentes aires, qui entrent dans la formule (3),

$$\begin{aligned}
aBC &= \widehat{BaC}(1 - \cos\varphi_a) = (\widehat{Bac} + \widehat{baC} - a)(1 - \cos\varphi_a) \text{ (*)} \\
bAC &= \widehat{AbC}(1 - \cos\varphi_b) = (\widehat{Abc} + \widehat{abC} - b)(1 - \cos\varphi_b) \\
cAB &= \widehat{AcB}(1 - \cos\varphi_c) = (\widehat{Acb} + \widehat{acB} - c)(1 - \cos\varphi_c) \\
s &= a + b + c - \pi \\
Abc &= \widehat{Abc} + \widehat{Acb} + \widehat{bAc} - \pi \\
Bac &= \widehat{Bac} + \widehat{acB} + \widehat{aBc} - \pi \\
Cab &= \widehat{baC} + \widehat{abC} + \widehat{aCb} - \pi.
\end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre ces sept équations, après avoir changé de signe les membres des trois dernières, il vient

$$\begin{aligned}
S = 2\pi &- (\widehat{bAc} + \widehat{aBc} + \widehat{aCb}) - \cos\varphi_a(\widehat{Bac} + \widehat{baC} - a) \\
&- \cos\varphi_b(\widehat{Abc} + \widehat{abC} - b) - \cos\varphi_c(\widehat{Acb} + \widehat{acB} - c).
\end{aligned}$$

Tous les angles qui entrent dans cette formule se calculent dans des triangles sphériques dont les trois côtés sont donnés ; ainsi

$$\widehat{bAc} = \arccos\frac{\cos\alpha - \cos\varphi_b\cos\varphi_c}{\sin\varphi_b\sin\varphi_c};$$

le résultat, en fonction des données, est :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
S = 2\pi &- \Sigma\arccos\frac{\cos\alpha - \cos\varphi_b\cos\varphi_c}{\sin\varphi_b\sin\varphi_c} - \Sigma\cos\varphi_a\left(\arccos\frac{\cos\varphi_c - \cos\beta\cos\varphi_a}{\sin\beta\sin\varphi_a}\right. \\
&\left. + \arccos\frac{\cos\varphi_b - \cos\gamma\cos\varphi_a}{\sin\gamma\sin\varphi_a} - \arccos\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\right).
\end{aligned}\right.$$

(*) Nous désignons par a, b, c les angles du triangle abc.

* * *

Cas particuliers et vérifications :

1° ABC *est un triangle sphérique.* On a

$$\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = 90°,$$
$$S = 2\pi - \Sigma \arccos(\cos\alpha) = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = A + B + C - \pi.$$

2° BC *est un grand cercle,* AB et AC *deux petits cercles perpendiculaires à son plan.* Les pôles b, c se trouvent donc sur BC,

$$\varphi_a = 90°, \qquad \beta = \gamma = 90°;$$

on obtient

$$(2)\quad \begin{cases} S = \arccos \dfrac{\cos\varphi_b \cos\varphi_c - \cos\alpha}{\sin\varphi_b \sin\varphi_c} - \cos\varphi_b \arccos \dfrac{\cos\varphi_c - \cos\alpha\cos\varphi_b}{\sin\alpha \sin\varphi_b} \\ \qquad - \cos\varphi_c \arccos \dfrac{\cos\varphi_b - \cos\alpha\cos\varphi_c}{\sin\alpha\sin\varphi_c}. \end{cases}$$

Observation. — Si les deux petits cercles ont même rayon sphérique γ, il vient

$$S = \arccos \frac{\cos^2\varphi - \cos\alpha}{\sin^2\varphi} - 2\cos\varphi \arccos \frac{\cos\varphi(1 - \cos\alpha)}{\sin\alpha\sin\varphi}.$$

En observant que

$$\arccos \frac{\cos^2\varphi - \cos\alpha}{\sin^2\varphi} = 2\arccos \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi},$$

il vient

$$S = 2\left(\arccos \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi} - \cos\varphi \arccos \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\varphi}\right) (*).$$

3° *Aire de la sphère comprise entre deux petits cercles qui se coupent.* — La circonférence du grand cercle normal, à l'inter-

(*) Voir Cesàro, *loc. cit.*, p. 8, ligne 10.

section des petits cercles partage la surface en question en deux triangles équivalents, dont l'aire est donnée par la formule (2).

Application. — D'un sommet b (fig. 2) du triangle trirectangle bMN, on décrit avec un rayon sphérique x un arc de petit cercle

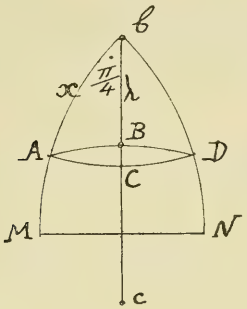


Fig. 2.

ACD; par les points A, D, on fait passer le grand cercle ABD. On demande pour quelle valeur de x l'aire ABDC est un maximum.

C'est un cas particulier de celui que nous venons d'examiner, dans lequel un des cercles devient un grand cercle; il faudra faire dans la formule (2)

$$\varphi_c = 90^\circ, \quad \varphi_b = x, \quad \alpha = bc = 90^\circ + \lambda;$$

on obtient

$$\frac{S}{2} = \arccos \frac{\sin \lambda}{\sin x} - \cos x \arccos \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} x}.$$

Comme

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}, \qquad \arccos \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} x} = \frac{\pi}{4};$$

en outre,

$$\arccos \frac{\sin \lambda}{\sin x} = \operatorname{arc\,tg}(\cos x);$$

par conséquent,

$$S = 2 \operatorname{arc\,tg}(\cos x) - \frac{\pi}{2} \cos x \ (*).$$

$$S' = \sin x \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{1 + \cos^2 x} \right).$$

S, qui s'annule pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, passe par un maximum pour

$$\cos x = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1};$$

la valeur maxima est

$$S_M = 2 \arccos \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1},$$

ou, en posant

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \cos \omega,$$

$$S_M = 2\omega - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \omega = \frac{\pi}{2} \left(2 \frac{\omega^\circ}{90^\circ} - \operatorname{tg} \omega \right).$$

En effectuant les calculs, on obtient

$$\omega = 27^\circ 55' 49'',59$$

$$x = 58^\circ 29' \ 5'',67$$

$$2 \frac{\omega}{90} = 0{,}613269$$

$$\operatorname{tg} \omega = 0{,}522723$$

$$S_M = 0{,}090546 \text{ du triangle trirectangle.}$$

(*) On arrive plus rapidement à cette formule en considérant la surface dont il s'agit comme la différence entre le secteur de zone *b*ACD et le triangle sphérique *b*ABD.

SUR

LA FORMULE DE LA MILARITE

DU LEUCOPHANE

ET

DE QUELQUES MINÉRAUX VOISINS

PAR

G. CESÀRO

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

SUR

LA FORMULE DE LA MILARITE

DU LEUCOPHANE

ET

DE QUELQUES MINÉRAUX VOISINS

Milarite.

Dans sa *Descriptive Mineralogy* (édition de 1896), M. Dana a apporté beaucoup de modifications à la classification des silicates, notamment en introduisant à l'état de combinaison l'eau qui était considérée comme eau d'hydratation. Ainsi, la calamine, qui était un orthosilicate *hydraté*

$$Zn^2SiO^4 + H^2O,$$

devient, soit un subsilicate acide, provenant de l'acide de la tourmaline H^6SiO^5, avec la formule $Zn^2H^2SiO^5$, soit un métasilicate basique dérivant de l'hydroxyde de zinc par la substitution de la moitié de ses groupes OH par le groupe acide $(SiO^3)''$ de l'acide métasilicique; dans ce dernier cas, la formule de la calamine serait

$$SiO^3 < \begin{matrix} Zn \,.\, OH \\ Zn \,.\, OH \end{matrix}.$$

Lorsqu'il s'agit de décider entre un silicate hydraté et un silicate anhydre contenant de l'eau basique, il ne faut pas perdre de vue

que des quantités d'eau, en apparence minimes, ne peuvent être négligées, étant donné le faible poids moléculaire de ce corps. Nous pensons que c'est le cas pour la *milarite*, que M. Dana considère comme un disilicate anhydre, tandis que les analyses consignées dans son ouvrage indiquent un silicate hydraté.

a) Si nous prenons d'abord l'analyse Ludwig (p. 313), qui est celle accusant le moins d'eau, nous avons

		ANALYSE MOLÉCULAIRE.
SiO^2.	71,81	1,197
Al^2O^3	10,67	0,104
CaO.	11,65	0,208
K^2O.	4,86	0,0517
H^2O.	1,56	0,0756
	100,55	

En désignant par RO le nombre des molécules des bases transformées (*) en protoxyde, abstraction faite d'H^2O, on a

$$\frac{SiO^2}{RO} = \frac{1,197}{0,5717} = 2,09 \qquad \frac{SiO^2}{RO + H^2O} = \frac{1,197}{0,6473} = 1,85.$$

On voit qu'à moins de dériver la milarite d'un acide à formule très compliquée, telle que $1,8\,SiO^2H^2O$, il n'est pas possible de supposer l'eau combinée. M. Dana dérive, avec raison, la milarite de l'acide disilicique

$$HO - \underset{\underset{O}{\|}}{Si} - O - \underset{\underset{O}{\|}}{Si} - OH = 2SiO^2 . H^2O = H^2Si^2O^5;$$

mais les rapports consignés ci-dessus prouvent que, si l'on peut espérer une certaine concordance en admettant *toute l'eau non combinée*, il ne sera pas possible d'obtenir un bon résultat en faisant l'hypothèse contraire. Si l'on veut traduire strictement par

(*) $Al^2O^3 = 3RO$.

une formule les résultats de l'analyse, il faut observer que le rapport 2,09 prouve qu'outre l'eau d'hydratation, il doit exister dans la milarite un certain nombre de molécules d'eau combinée, nombre donné par

$$\frac{1}{2}\,SiO^2 - RO = 0{,}0268,$$

soit environ le tiers de l'eau totale ; on arrive ainsi à la formule

$$\frac{(Al^2)^4}{(Ca^4K^2H)^2}(Si^2O^5)^{25} + 2aq, \qquad (1)$$

qui donne une très bonne concordance :

SiO^2 — 71,46 Al^2O^5 — 10,67 CaO — 11,60 K^2O — 4,87
H^2O — 1,40.

On peut observer que le rapport entre la partie de l'hydrogène de l'acide $H^2Si^2O^5$ remplacée par le métal à sesquioxyde et celle remplacée par les métaux formant des protoxydes, est $\frac{H}{h} = \frac{12}{11}$ dans la formule (1) ; si l'on cherche à simplifier ce rapport, en augmentant un peu la proportion d'eau combinée, et par conséquent celle de la silice, on obtient

$$12SiO^2 \cdot Al^2O^5 \cdot 2CaO \cdot \frac{1}{2}K^2O \cdot \frac{1}{2}H^2O + \frac{1}{4}aq = \frac{Al^2}{Ca^2KH}(Si^2O^5)^6 + \frac{1}{4}aq, \qquad (2)$$

c'est-à-dire *la formule de M. Dana, augmentée* de $\frac{1}{4}$ de molécule d'eau d'hydratation. La formule (2) donne encore une bonne concordance, tandis qu'avec celle de M. Dana on obtient une forte discordance pour la proportion d'eau :

	(2).	Dana.
SiO^2.	72,3	72,7
Al^2O^5	10,3	10,4
CaO.	11,3	11,3
K^2O.	4,7	4,7
H^2O.	1,4	0,9
	100,0	100,0

b) L'*analyse* de *Finkener* donne

		ANALYSE MOLÉCULAIRE.
SiO^2. . .	70,04	1,167
Al^2O^3 . . .	11,62	0,113
CaO. . . .	10,05	0,1795
MgO . . .	0,20	0,005
Na^2O . . .	0,65	0,0105
K^2O. . . .	5,74	0,0611
H^2O. . . .	1,69	0,0939
	99,99	

$$\frac{SiO^2}{RO} = \frac{1,167}{0,5951} = 1,96$$

$$\frac{SiO^2}{RO + H^2O} = \frac{1,167}{0,689} = 1,69.$$

Cette analyse conduit encore à un disilicate; mais, comme en excluant toute l'eau de la combinaison on arrive à peine au rapport $\frac{SiO^2}{RO} = 2$, ici *il n'est plus possible d'introduire, même partiellement, de l'eau dans la combinaison.* La formule

$$\frac{(Al^2)^5}{Ca^5K^4}(Si^2O^5)^{16} + \frac{8}{3}aq. \qquad (3)$$

répond bien à l'analyse; elle donne

SiO^2 — 69,7 Al^2O^5 — 11,2 CaO — 10,2 K^2O — 7,2
H^2O — 1,7.

Il faut observer que le rapport $\frac{H}{h}$ diffère notablement de celui donné par la première analyse; ici $\frac{H}{h} = 1,32$ et $\frac{H}{h} = \frac{9}{7}$ d'après la formule (3).

c) *Analyse Frenzel.*

		ANALYSE MOLÉCULAIRE.
SiO^2. . .	71,12	1,185
Al^2O^3 . . .	8,45	0,082
CaO. . . .	11,27	0,201
Na^2O . . .	7,61	0,123
H^2O. . . .	1,55	0,086
	100,00	

$$\frac{SiO^2}{RO} = \frac{1,185}{0,57} = 2,08$$

$$\frac{SiO^2}{RO + H^2O} = \frac{1,185}{0,656} = 1,81.$$

Il est remarquable que les valeurs 2,08 et 1,81 sont presque identiques à celles données par la première analyse, tandis que le rapport $\frac{H}{h} = 0{,}71$ diffère beaucoup de l'unité, à cause de la faible proportion d'Al^2O^3 indiquée par l'analyse Frenzel. — Ici, comme pour la première analyse, on peut obtenir une excellente dérivation de l'acide disilicique en partageant l'eau en

$$H^2O = \frac{1}{2} SiO^2 - RO = 0{,}0225 \text{ et } aq. = 0{,}0635.$$

En ramenant l'analyse moléculaire à 4 molécules d'Al^2O^3, on obtient

$$57{,}8\,SiO^2 . 4Al^2O^3 . 9{,}8\,CaO . 6\,Na^2O . 1{,}1\,H^2O + 3{,}1\,aq.$$

ou, très approximativement,

$$\frac{(Al^2)^4}{(Ca^5Na^6H)^2}(Si^2O^5)^{29} + 3aq. \qquad (4)$$

formule correspondant, en poids, à

SiO^2 — 71,1 Al^2O^3 — 8,4 CaO — 11,4 Na^2O — 7,6
H^2O — 1,5.

Conclusion. — Quoique les trois analyses ne soient pas concordantes en ce qui concerne la valeur de $\frac{H}{h}$, il en découle deux faits communs : 1° Le rapport $\frac{SiO^2}{RO} = 2$, c'est-à-dire que la milarite est un disilicate. 2° Que *certainement une partie de l'eau au moins* (*) *n'est pas combinée* et que, par conséquent, la milarite doit être rangée dans les *disilicates hydratés*.

* * *

Le tableau qui suit donne les trois analyses moléculaires sur le

(*) La totalité d'après la seconde analyse.

même poids de substance, leur moyenne, puis le nombre de molécules correspondant à une molécule d'alumine :

SiO^2	Al^2O^3	RO	R^2O	H^2O
1,197	0,104	0,208	0,0517	0,0756
1,167	0,115	0,1845	0,0716	0,0939
1,185	0,082	0,201	0,123	0,086
3,549	0,299	0,5955	0,2463	0,2555
11,9	1	2	0,8	0,9 ;

on a donc sensiblement, *pour la moyenne des trois analyses*,

$$12\,SiO^2 . Al^2O^3 . 2CaO . K^2O . H^2O,$$

c'est-à-dire

$$Ca^2K^2\overset{Al^2}{(}(Si^2O^5)^6 + aq. \qquad (5)$$

Cette formule, relativement simple, peut être acceptée, en attendant de plus nombreuses analyses précisant les proportions d'alumine et d'alcalis ; elle exprime les deux caractères paraissant bien appartenir à l'espèce : 1° dérivation de l'acide $H^2Si^2O^5$; 2° présence d'eau non combinée.

SILICATES INTERMÉDIAIRES.

Leucophane.

M. Dana place le leucophane dans ses silicates intermédiaires, c'est-à-dire dans les silicates dérivant d'un acide compris entre l'acide métasilicique H^2SiO^3 et l'acide orthosilicique H^4SiO^4 ; or, la formule qu'il lui assigne

$$NaCa(GlFl)(SiO^3)^2 \qquad (6)$$

représente un métasilicate, soit que l'on considère le Gl existant à l'état de $Gl<^{Fl}$, soit que l'on écrive

$$CaGl(SiO^3)^2 + NaFl. \qquad (6)$$

Seulement, M. Dana a raison de placer le leucophane parmi les silicates intermédiaires, car la formule (6) n'exprime pas la composition de ce minéral déduite des quatre analyses complètes qu'il cite, analyses dont voici le tableau, la moyenne, puis la moyenne en molécules :

	SiO^2	Al^2O^3	GlO	CaO	MgO	Na^2O	K^2O	Fl(*)
	47,82	0	11,51	25,00	0	10,20	0,51	6,17
	47,03	1,05	10,70	25,57	0,17	11,26	0,50	6,57
	48,58	0	11,97	25,57	0	10,27	0,50	6,77
	48,50	0,45	10,03	22,94	0,27	12,42	0	5,94
Moy.	47,95	0,37	11,05	25,67	0,11	11,04	0,25	6,56
Mol.	0,7988	0,0036	0,442	0,4227	0,0027	0,1781	0,0024	0,3547

La formule (6) exige qu'il y ait le même nombre d'atomes de Gl, Ca, Na et Fl; or les analyses donnent, en atomes

Gl	Ca + Mg	Na + K	Fl
0,442	0,4254	0,361	0,3547;

on voit que la concordance n'existe guère en ce qui concerne le fluor et les métaux alcalino-terreux.

Quoi que l'on fasse, il y a trop de base pour qu'on puisse rapporter le leucophane à l'acide métasilicique.

Un acide intermédiaire entre le métasilicique $m = H^2SiO^3$ et l'orthosilicique $o = H^4SiO^4$ peut être représenté symboliquement par $m^z o^1$, le rapport de l'eau à l'anhydride y étant

$$r = 1 + \frac{1}{x + 1};$$

réciproquement, r étant connu, la formule de l'acide intermédiaire est donnée par

$$x = \frac{2 - r}{r + 1}.$$

(*) Nous avons fait abstraction de $H^2O = 1,08$ % et $MnO = 1,02$ % qui ne sont renseignés chacun que par une analyse sur sept.

Pour calculer r dans le leucophane, supposons d'abord, avec M. Dana, que le fluor y entre à l'état de radical monovalent GlFl, formant une base $(GlFl)^2O$ analogue à Na^2O; comme il y a trop de glucinium, il faudra admettre que ce dernier se trouve, en outre, dans le leucophane, à l'état de GlO; or, 0,16735 de Fl^2 se combinent à 0,16735 de Gl^2 et donnent 0,16735 mol. de $(GlFl)^2O$; il reste donc $0,442 - 0,5547 = 0,1075$ atomes de Gl, correspondant à 0,1073 molécules de GlO.

Il vient donc pour le nombre de molécules des différents composants,

SiO^2	0,7988		
GlO	0,1075		$r = \frac{8915}{7988}$
CaO	0,4227		
MgO. . . .	0,0027		
Na^2O. . . .	0,1781	RO = 0,8913	$x = \frac{7065}{925} = 7,6$
K^2O	0,0024		
$(GlFl)^2O$. . .	0,1675		
$3Al^2O^3$ . . .	0,0108		

En prenant $x = 8$, on pourra dériver le leucophane de

$$m^8o^4 = H^{20}Si^9O^{28}.$$

En ramenant la composition moléculaire ci-dessus à 9 SiO^2, il vient

CaO + MgO	GlO	$Na^2O + K^2O$	$(GlFl)^2O$
—	—	—	—
4,8	1,2	2	1,9

et sensiblement

$$9\,SiO^2 . 5\,CaO . GlO . 2\,Na^2O . 2(GlFl)^2O,$$

ou

$$\begin{matrix} Ca^5Gl \\ Na^4(GlFl)^4 \end{matrix} (Si^9O^{28}) \qquad (7)$$

Le tableau qui suit donne dans ses deux premières colonnes la composition en poids déduite de la formule (7); la troisième

colonne donne la composition centésimale, qui est bien concordante avec celle donnée par les analyses :

					%o
$9\,SiO^2$ . . .	540		$9\,SiO^2$ . . .	540	48,5
GlO . . .	25		$5\,GlO$ . . .	125	11,2
$5\,CaO$ . . .	280	ou bien	$5\,CaO$ . . .	280	25,2
$2\,Na^2O$ . . .	124		$2\,Na^2O$ . . .	124	11,2
$2(Gl\,Fl)^2O$ . .	144		$4\,Fl$	76	6,8
			Oxygène à soustraire	— 32	— 2,9
	1113			1113	100

* * *

Dans le tableau donné page 9, on peut observer que le fluor paraît saturer sensiblement les métaux alcalins; en partant de là, on arrive, par un calcul analogue au précédent, au même acide, puis à un sel de Ca et Gl combiné à du fluorure alcalin; c'est ce que d'ailleurs indique la formule (7), qui peut s'écrire

$$(CaGl)^5Si^9O^{28} + 4NaFl. \qquad (7^{bis})$$

Rammelsberg est arrivé à une formule analogue :

$$6\,RSiO^5 + R^2SiO^4 + 3NaFl,$$

en dérivant le leucophane de l'acide $m^6o^1 = H^{16}Si^7O^{22}$.

Mélinophane.

Rammelsberg dérive le mélinophane de l'acide $m^1o^1 = H^6Si^2O^7$, M. Dana de l'acide $m^2o^1 = H^8Si^3O^{10}$; ce dernier adopte la formule

$$NaCa^2Gl^2FlSiO^{10},$$

qui laisse à désirer, vu qu'elle correspond à 46,9 % de silice, tandis que les analyses en donnent de 41,4 à 43,66. Nous ne prendrons

en considération, pour la recherche de la formule, que les deux analyses complètes, nos 1 et 6 (p. 418) et feront abstraction des 0,5 % d'H^2O renseignés par une analyse sur six.

N° 1.	SiO^2	Al^2O^5	GlO	CaO	MgO	Na^2O	K^2O	Fl^2
	43,66	1,57	11,74	26,74	0,11	8,55	1,40	5,73
Mol.	0,728	0,015	0,47	0,48		0,153		0,151.

0,151 de Fl^2 se combinent à 0,151 de Gl^2 pour former 0,151 mol. de $(GlFl)^2O$; il reste 0,47 — 0,302 = 0,168 atomes de Gl, donnant 0,168 mol. de GlO.

La composition moléculaire peut donc s'écrire

$$\left.\begin{array}{ll} SiO^2 & 0{,}728 \\ 5\,Al^2O^5 & 0{,}045 \\ GlO & 0{,}168 \\ CaO & 0{,}480 \\ Na^2O & 0{,}153 \\ (GlFl)^2O & 0{,}151 \end{array}\right\} \quad RO = 0{,}997 \qquad \begin{array}{l} r = \dfrac{997}{728} \\ \\ x = \dfrac{459}{269} \end{array}$$

En transformant $\frac{459}{269}$ en fraction continue, et faisant les réduites, on obtient

$$x = 1,\ 2,\ \frac{5}{3},\ \frac{12}{7},\ \cdots;$$

on arrive donc, comme première approximation, à l'acide m^1o^1 de Rammelsberg, puis à l'acide m^2o^1 adopté par M. Dana, puis à

$$m^5o^5 = H^{22}Si^8O^{27} = 8\,SiO^2 . 11\,H^2O\ (^*).$$

En ramenant l'analyse moléculaire ci-dessus à $8\,SiO^2$, on obtient

$3Al^2O^5$	GlO	CaO	Na^2O	$(GlFl)^2O$	
0,49	1,85	5,27	1,68	1,66	= 10,95,

(*) Si l'on tenait compte des 0,3 % d'H^2O donnés par cette analyse et que l'on supposait cette eau combinée, on aurait RO = 1,014 et $x = \frac{17}{11} = 1,\ 2,\ \frac{3}{2}\cdots$ Dans ce cas, $x = \frac{3}{2}$ conviendrait mieux que $\frac{5}{3}$.

et l'on voit que $8SiO^2 . 11\,RO$ correspond parfaitement à l'analyse; seulement on arrive à la formule très compliquée

$$\begin{matrix} Al^2Gl^{11}Ca^{52} \\ (Na\,.\,GlFl)^{20} \end{matrix} (Si^8O^{27})^6$$

ou bien

$$Al^2Gl^{31}Ca^{32}(Si^8O^{27})^6 + 20\,NaFl.$$

Pour voir si l'on peut se contenter de l'approximation m^2o^1, ramenons l'analyse moléculaire ci-dessus à $3\,SiO^2$

$3Al^2O^5$	GlO	CaO	Na^2O	$(GlFl)^2O$	
0,185	0,692	1,978	0,630	0,622	= 4,107

Il y a donc 0,107 RO en trop; si l'on néglige l'alumine dont la proportion est douteuse (*), il y aura 0,078 RO en trop; en diminuant SiO^2 proportionnellement (**), on arrive à

SiO^2	GlO	CaO	Na^2O	$(GlFl)^2O$	
5	0,71	2,02	0,64	0,63	RO = 4,

puis à

$$\begin{matrix} Ca^6Gl^2 \\ (Na\,.\,GlFl)^4 \end{matrix} (Si^5O^{10})^5 \qquad (8)$$

ou bien

$$(CaGl)^2Si^5O^{10} + \frac{4}{5}\,NaFl, \qquad (8)$$

formule qui donne une correspondance passable :

SiO^2	GlO	CaO	Na^2O	Fl	O	
45,2	12,6	28,1	10,4	6,4	—2,7	= 100.

La formule (8) ne diffère de celle de M. Dana que par le nombre de molécules de NaFl qui ici est augmentée d'un tiers.

(*) Il faut observer que l'alumine consignée dans l'analyse contient du Fe^2O^5 et du Mn^2O^5 dont les poids moléculaires sont respectivement 160 et 158.

(**) $2,9415\,SiO^2 . 3,922\,RO$.

Analyse n° 6.

	SiO^2	Al^2O^3	GlO	CaO	MgO	Na^2O	K^2O	Fl^2
	43,60	4,61	9,80	29,56	0,16	7,98	0,23	5,43
Mol	0,727	0,045	0,392	0,532		0,1314		0,143.

0,143 Fl^2 se combinent à 0,143 Gl^2 et donnent 0,143 mol. de $(GlFl)^2O$; il reste 0,392 — 0,286 = 0,106 atomes de Gl et, par conséquent, 0,106 GlO.

La composition moléculaire peut donc s'écrire

SiO^2. . . . 0,727
$5\,Al^2O^5$ . . . 0,135
GlO 0,106
CaO 0,532
Na^2O . . . 0,1314
$(GlFl)^2O$. . . 0,143

} RO = 1,0474

$$r = \frac{1047,4}{727}$$

$$x = \frac{2033}{1602} = 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{14}{11} \ldots$$

On voit qu'ici la base est en excès; cependant, les deux analyses peuvent être considérées comme concordantes : elles donnent pour 727 molécules de SiO^2, l'une 997, l'autre 1 047 molécules de RO, et le nombre de molécules de Al^2O^3 pourrait bien être trop grand dans la seconde analyse (où cet oxyde figure en quantité non négligeable) à cause du Fe^2O^3 qu'il contient (*). La formule (8) représente encore sensiblement la composition indiquée par la seconde analyse; seulement, dans celle-ci, l'alumine n'est plus négligeable. D'après ce qui précède, on obtiendra une bonne formule en considérant la moyenne des deux analyses :

	SiO^2	Al^2O^3	GlO	CaO MgO	Na^2O K^2O	Fl^2
Analyse 1.	0,728	0,015	0,470	0,480	0,153	0,151
Analyse 6.	0,727	0,045	0,392	0,532	0,151	0,143
Moyenne :	0,727	0,030	0,431	0,506	0,142	0,147

(*) Si l'on supposait que les 4,61 °/₀ d'Al^2O^3 étaient remplacés par Fe^2O^3, on tomberait à 999 molécules de RO.

Donc : 0,147 $(GlFl)^2O$ et 0,137 GlO, puis

$3Al^2O^3$ . . .	0,090	$r = \frac{1022}{727}$
GlO	0,137	
CaO	0,506	RO = 1,022
Na^2O . . .	0,142	
$(GlFl)^2O$. . .	0,147	$x = \frac{432}{295} = 1, \frac{3}{2}, \frac{19}{13} \ldots$

En prenant $x = \frac{3}{2}$, on arrive à l'acide

$$m^3o^2 = H^{14}Si^5O^{17} = 5SiO^2 . 7H^2O \ (*),$$

puis, en ramenant la composition moléculaire à $10SiO^2$,

$3Al^2O^3$	1,24	3,12
GlO	1,88	
CaO	6,96	
Na^2O.	1,95	
$(GlFl)^2O$	2,02	
	14,05	

En supposant que Al^2 remplace partiellement Gl dans GlO, ce qui paraît indiqué par les analyses, on peut écrire

$$10SiO^2 . 3GlO . 7CaO . 2Na^2O . 2(GlFl)^2O,$$

ou

$$\begin{matrix} Ca^7(Gl^3, Al^2)_{VI} \\ (Na . GlFl)^4 \end{matrix} (Si^5O^{17})^2. \qquad (9)$$

Dans cette formule, les trois molécules de glucine dans lesquelles il y a remplacement partiel du Gl par l'Al sont formées de 1,8 mol. de GlO et 0,4 mol. d'Al^2O^3, de sorte que $\frac{Gl^3}{Al^2} = \frac{3}{2}$. La correspondance est bonne; dans le tableau qui suit, on a trans-

(*) Dans cet acide, 727 molécules de SiO^2 correspondent à 1017,8 molécules de H^2O ; l'acide m^2o^4 donnera des résultats trop forts en silice, car pour 727 de cette substance, il ne contient que 969 1/3 molécules de H^2O.

formé MgO en CaO et K^2O en Na^2O dans la moyenne des deux analyses :

		%	Moyenne des analyses.
$10SiO^2$	600	44,6	43,6
$0,4Al^2O^3$ . . .	41,2	3,1	3,1
7CaO	392	29,1	28,3
$2Na^2O$	124	9,2	8,8
5,8GlO	145	10,8	10,8
$2Fl^2$	76	5,6	5,6
$-O^2$.	— 32	— 2,4	
	1346,2	100	100,2

* * *

Si l'on rapproche la formule (7^{bis}) [p. 11] du leucophane de la formule (9) [p. 15] du mélinophane,

Leucophane . . . . . $(CaGl)^5Si^9O^{28} + 4NaFl$
Mélinophane . . . . . $(CaGl)^7(Si^3O^{17})^2 + 4NaFl$,

on voit l'analogie de composition de ces deux minéraux :

Ce sont des combinaisons moléculaires de quatre molécules de fluorure alcalin avec un sel double de Ca *et* Gl, *où ces métaux entrent en parties équivalentes, sel dérivé, pour le leucophane, de l'acide* m^8o^1, *et pour le mélinophane de l'acide* m^3o^2.

Barysilite.

M. Dana adopte la formule $Pb^3Si^2O^7$, en dérivant ce minéral de l'acide $m^1o^1 = H^6Si^2O^7$; mais les analyses, dont deux très concordantes, ne permettent guère de dériver la barysilite de cet acide (p. 421).

		Molèc.		Molèc.		Molèc.
SiO^2	17,85	0,298	16,98	0,283	16,85	0,281
PbO	73,39	0,330	77,84	0,350	77,64	0,349
MnO	4,14	0,058	3,49	0,049	3,67	0,052
FeO	0,44	0,006	0,16	0,002	0,12	0,002
CaO	1,29	0,023	0,41	0,007	0,23	0,004
MgO	1,09	0,027	0,58	0,015	0,57	0,014
H^2O	1,20	0,067	0,66	0,037	0,54	0,030
RO		0,511		0,460		0,451
RO pour $H^6Si^2O^7$.		0,447		0,4245		0,4215

On a :

1^{re} Analyse. $r = \frac{511}{298}$, $x = \frac{85}{213} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \ldots$

2^{me} — $r = \frac{460}{283}$, $x = \frac{106}{177} = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \ldots$

3^{me} — $r = \frac{451}{281}$, $x = \frac{111}{170} = 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$

Les deux dernières analyses sont très concordantes et diffèrent de la première surtout par le rapport de PbO aux autres bases, rapport qui n'y atteint pas 2, tandis qu'il dépasse 3 dans les deux dernières analyses. Nous traiterons d'abord la moyenne de celles-ci, qui donne, en molécules,

SiO^2	0,282	
PbO	0,350	RO = 0,455
(Mn, Fe)O. . .	0,052	
(Mg, Ca)O. . .	0,020	
H^2O	0,033	

$$r = \frac{455}{282}$$

$$x = \frac{109}{173} = 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \ldots$$

Pour

$x = 1, r = \frac{3}{2}$, l'acide est m^1o^1, exigeant, pour 282 SiO^2, 423 mol. de RO

$x = \frac{1}{2}, r = \frac{5}{3}$, — m^1o^2, — — 470 —

$x = \frac{2}{3}, r = \frac{8}{5}$, — m^2o^5, — — 451,2 —

On voit que pour avoir une bonne approximation, il faut recourir à l'acide

$$m^2o^5 = H^{16}Si^5O^{18} \quad (*).$$

(*) La manière dont M. Dana vérifie sa formule n'est pas probante : en supposant tous les RO remplacés par PbO, il trouve pour $Pb^3Si^2O^7$, SiO^2 — 15,2, PbO — 84,8. Le sel $Pb^8Si^5O^{18}$ donnerait : SiO^2 — 14,4, PbO — 85,6 et s'éloignerait encore plus que celui de M. Dana des analyses qui donnent SiO^2 — 16,9; cependant il est clair qu'étant donnée la méthode par laquelle on est arrivé à l'acide m^2o^5, il doit constituer une formule pour ainsi dire exacte. Cela provient de ce que si les autres protoxydes sont équivalents à PbO *moléculairement*, ils ne le sont pas *pondéralement*.

* * *

Cependant, *si l'on suppose que l'*H^2O *n'est pas combinée, on tombe exactement sur l'acide* m^1o^1 *employé par* M. Dana; effectivement, on aura

$$282\,SiO^2 . 422\,RO . 33\,aq.,$$

qui est bien la proportion trouvée ci-dessus pour $x = 1$.

En ramenant la composition moléculaire à $2SiO^2$, il vient

$$2{,}48\,PbO - 0{,}58\,MnO - 0{,}14\,MgO = 3 \text{ molécules} + 0{,}23\,aq.,$$

ce qui correspond sensiblement à

$$\begin{matrix} Pb^{20} \\ Mn^3Mg \end{matrix} (Si^2O^7)^8 + 2\,aq., \qquad (10)$$

formule qui donne une bonne correspondance avec la moyenne des deux analyses dont elle a été déduite.

		Moyenne des analyses
SiO^2	16,85	16,90
PbO	78,08	77,74
MnO	3,74	3,72
MgO	0,70	0,80
H^2O	0,63	0,60
	100	99,76

* * *

Le tableau d'analyse moléculaire de la page 16 montre que dans la barysilite

$$PbO : MnO : MgO + H^2O = 6{,}73 : 1 : 1. \qquad (a)$$

La formule (10), très conforme à l'analyse, donne 6,67 : 1 : 1. Il est plus difficile d'obtenir une formule aussi exacte, avec le même

degré de simplicité, en supposant l'eau combinée et en dérivant, par conséquent, la barysilite de l'un des acides

$$m^1o^2 = 3\,SiO^2 . 5\,H^2O,\ m^2o^5 = 5\,SiO^2 . 8\,H^2O.$$

Si l'on dérive la formule du premier, on peut adopter pour $(a) : 27 : 4 : 4$, correspondant à 35 RO et à 7 molécules d'acide. Pour la dérivation du second acide, on peut se contenter (*) pour (a) de $6 : 1 : 1$, correspondant à 8 RO et à une molécule d'acide; on obtient les formules

$$Pb^{27}Mn^4(Mg, H^2)^4\,(Si^5O^{11})^7 \text{ pour } m^1o^2, \qquad (11)$$

et

$$Pb^6Mn\,(Mg, H^2)Si^5O^{18} \text{ pour } m^2o^5. \qquad (12)$$

Dans les deux formules, $Mg : H^2 = 3 : 5$, c'est-à-dire que dans une molécule $(Mg, H^2)O$ il y a $\frac{3}{8}$ de MgO et $\frac{5}{8}$ de H^2O. Les correspondances sont passables :

	m^1o^2	m^2o^5	ANALYSES
SiO^2	16,46	17,48	16,90
PbO	78,46	77,78	77,74
MnO	3,71	3,21	3,72
MgO	0,78	0,87	0,80
H^2O	0,59	0,66	0,60
	100	100	99,76

(*) Pour avoir la formule exacte, il faudrait employer l'acide m^2o^5 et chercher un entier qui, multiplié par les trois nombres $6,73 : 1 : 1$, donne des résultats différant très peu des nombres entiers dont la somme serait un multiple de 8. Le plus petit nombre répondant à la question est 11, qui donne $74 : 11 : 11$, *somme* 96, correspondant à 12 molécules d'acide. La formule $Pb^{74}\}Mn\,(Mg, H^2)\{^{11}(Si^5O^{18})^{12}$, dans laquelle $\frac{Mg}{H^2} = \frac{3}{5}$, donnera une correspondance parfaite.

Si l'on prenait pour $(a) : 7 : 1 : 1$, on s'approcherait évidemment plus que par la formule (12), mais on obtient une formule très compliquée $Pb^{56}Mn^8Mg^3H^1{}_0\,(Si^5O^{18})^9$.

* * *

Il nous reste à envisager l'analyse n° 1, pour laquelle on a trouvé (p. 16)

SiO^2	0,298		$r = \frac{511}{298}$
PbO	0,330	$RO = 0{,}511$	
MnO + FeO. .	0,064		$x = \frac{85}{213} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \ldots$
CaO + MgO. .	0,050		
H^2O	0,067		

Ici, l'acide m^1o^1 ne peut donc plus convenir : il y a trop de base; même, l'acide m^1o^3 conviendra mieux que m^1o^2; on ne peut espérer obtenir une concordance bien satisfaisante avec la formule donnée par les autres analyses.

a) *Si l'on suppose* H^2O *non combinée*, il vient $r = \frac{222}{149}$ et $x = \frac{76}{73}$; on retombe encore sur l'acide m^1o^1 employé par M. Dana; mais la proportion d'H^2O est différente : en ramenant la composition moléculaire ci-dessus à $16\,SiO^2$, on obtient

$$17{,}7\,PbO - 3{,}4\,MnO - 2{,}7\,MgO - 3{,}6\,H^2O,$$

ou, sensiblement,

$$16\,SiO^2 . 18\,PbO . 3{,}5\,MnO . 2{,}5\,MgO + 3{,}6\,aq.;$$

tandis que la formule (10) donne

$$16\,SiO^2 . 2\,OPbO . 3\,MnO . Mgo + 2aq.$$

On voit que la correspondance est parfaite pour les protoxydes, dans l'une des formules $2\,PbO$ étant remplacé par d'autres bases; mais la différence entre les nombres de molécules d'eau d'hydratation rend les formules ainsi écrites incompatibles.

b) On peut essayer un rapprochement en essayant l'eau combinée, car alors la différence entre 27,6 molécules de base et 26 molécules n'a plus le même poids.

Si, pour donner plus d'importance aux analyses 2 et 3, on essaye de ramener les résultats de l'analyse 1 à m^2o^5, on obtient pour $5SiO^2$, d'après les tableaux des analyses moléculaires (pp. 17 et 20),

		PbO	MnO	MgO	H^2O	
Analyse 1		5,54	1,07	0,84	1,12	= 8,57 RO
	ou bien	5,17	1,00	0,78	1,05	= 8 RO
Analyses 2 et 3.		6,21	0,92	0,35	0,59	= 8,07 RO.

La première diffère de l'autre par le remplacement d'une molécule de PbO par environ $\frac{1}{2}$ MgO et $\frac{1}{2}$ H^2O. En effectuant ce remplacement dans la formule (12) [p. 19],

$$Pb^{48}Mn^8Mg^3H^{10}(Si^5O^{18})^8, \qquad (12)$$

on obtient

$$Pb^{40}Mn^8Mg^7H^{18}(Si^5O^{18})^8. \qquad (13)$$

Pour passer de (12) à (13), il suffit d'y remplacer Pb^8 par Mg^4H^8.

Mais la correspondance de la formule (13) avec les résultats de l'analyse n° 1 laisse à désirer en ce qui concerne la proportion de silice :

	SiO^2	PbO	MnO	MgO	H^2O	
Formule (13) . .	19,50	72,29	4,62	2,28	1,31	= 100
Analyse n° 1 . .	17,85	73,39	4,57	2,01	1,20	= 99,02

Enfin, on peut recourir à la valeur $x = \frac{1}{2}$, qui convient aux trois analyses, tout en convenant moins que $\frac{2}{3}$ aux deux dernières.

On a obtenu pour celles-ci (p. 19, form. 11)

$$Pb^{27}Mn^4(Mg, H^2)^4(Si^5O^{11})^7; \qquad (11)$$

en y remplaçant Pb^4 par Mg^2H^4, il vient

$$Pb^{23}Mn^4Mg^2H^4(Mg, H^2)^4(Si^5O^{11})^7, \qquad (14)$$

formules dans lesquelles, dans (Mg, H^2), $\frac{Mg}{H^2} = \frac{3}{5}$.

Les correspondances sont satisfaisantes :

	Formule 14	Analyse 1	Formule 11	Analyses 2 et 3
SiO^2 . . .	18,31	17,85	16,46	16,90
PbO . . .	74,35	73,39	78,46	77,74
MnO . . .	4,13	4,57	3,71	3,72
MgO . . .	2,03	2,01	0,78	0,80
H^2O . . .	1,18	1,20	0,59	0,60
	100,00	99,02	100,00	99,76

* * *

Il résulte de ce qui précède que, pour tenir compte des différentes analyses, il faut envisager la *barysilite comme un silicate intermédiaire de plomb et de manganèse, provenant de l'acide*

$$m^4o^2 = H^{10}Si^3O^{11},$$

silicate dans lequel un certain nombre de molécules d'oxyde plombique sont remplacées par MgO, H^2O, CaO.

En forçant un peu la dose de PbO dans les formules 11 et 14, on arrive aux formules relativement simples

$$Pb^4RSi^3O^{11} = 3SiO^2.4PbO.RO \qquad (11^{bis})$$

$$3SiO^2.\frac{10}{3}PbO.\frac{5}{3}RO. \qquad (14^{bis})$$

Dans la correspondance qui suit, on a supposé, dans la première formule, comme dans les analyses 2 et 3,

$$RO = \frac{1}{2}MnO + \frac{1}{2}(MgO, H^2O), \text{ avec } Mg : H^2 = 3 : 5,$$

et dans la seconde,

$$12\,RO = 4\,MnO\,.\,3{,}5\,MgO\,.\,4{,}5\,H^2O,$$

conformément à l'analyse n° 1.

	Formule 11bis	Analyses 2 et 3	Formule 14bis	Analyse 1
SiO^2 . . .	16,10	16,90	18,15	17,85
PbO . . .	79,55	77,74	74,77	75,39
MnO . . .	3,17	3,72	3,98	4,57
MgO . . .	0,67	0,80	1,96	2,01
H^2O . . .	0,51	0,60	1,14	1,20
	100	99,76	100	99,02

Ganomalite.

On trouve dans l'ouvrage de M. Dana trois analyses : les nos 1 et 2, presque identiques, donnent comme moyenne :

		Analyse moléculaire.	
SiO^2. .	20,41	0,3402	
PbO .	69,42	0,3121	RO = 0,4887
CaO. .	9,89	0,1766	
	99,72		

$$r = \frac{181}{126}$$

$$x = \frac{71}{55} = 1, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \ldots$$

On pourrait donc ramener ce silicate soit à l'acide $m^1o^1 = H^6Si^2O^7$ avec la formule approximative $Pb^2CaSi^2O^7$, soit presque exactement à l'acide $m^4o^5 = 7\,SiO^2\,.\,10\,H^2O$; effectivement, en ramenant la composition moléculaire ci-dessus à $7\,SiO^2$, on obtient 6,42 PbO et 3,63 CaO, donc 10,05 RO. En donnant au rapport PbO : CaO une valeur convenable, on peut obtenir, à l'aide de l'acide m^4o^5, une formule aussi approchée qu'on le désire; on peut prendre pour ce rapport $\frac{13}{7}$ et employer deux molécules d'acide, donnant $Pb^{13}Ca^7(Si^7O^{24})^2$, ou bien $\frac{16}{9}$ et employer cinq

molécules d'acide; on obtient, dans ce dernier cas, $Pb^{32}Ca^{18}(Si^7O^{24})^5$.

	SiO^2	PbO	CaO
	—	—	—
$Pb^2CaSi^2O^7$	19,33	71,65	9,02
$Pb^{15}Ca^7(Si^7O^{24})^2$ . . .	20,37	70,12	9,51
$Pb^{32}Ca^{18}(Si^7O^{24})^5$ . .	20,54	69,60	9,86
Analyses 1 et 2. . .	20,41	69,42	9,89

Analyse n° 3. — Elle conduit à des *résultats incompatibles avec les précédents :*

		ANALYSE MOLÉCULAIRE.	
		—	
SiO^2	18,33	0,3055	
PbO	68,80	0,3094	RO = 0,5445
MnO	2,29	0,0323	
CaO	9,34	0,1668	
H^2O	0,57	0,0317	
MgO	0,11	0,00275	
CuO	0,02	0,00025	
R^2O	0,10	0,013	
Al^2O^3.	0,07	0,00068	R^2O^3 = 0,00143.
Fe^2O^3	0,12	0,00075	
Cl^2.	0,24	0,0034	
P^2O^5	0,04	0,00028	

0,0034 de Cl^2 correspondant à 0,00113 de R^2O^3
0,00028 de P^2O^5 correspondant à 0,00028 de R^2O^3 } 0,00141,

on voit que l'on peut faire abstraction des sesquioxydes, du chlore et de l'anhydride phosphorique.

$$r = \frac{5445}{3055}, \qquad x = \frac{133}{478} = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{5}{18}, \ldots \qquad (b)$$

Ainsi, la valeur de x est d'environ $\frac{4}{3}$ pour les deux premières analyses et d'environ $\frac{1}{4}$ pour l'analyse n° 3!

M. Dana, qui n'envisage donc probablement que cette dernière, emploie $x = \frac{1}{2}$ et donne la formule

$$3\,SiO^2 . 3\,PbO . 2(Ca, Mn)O,$$

qui dérive de l'acide $m^1o^2 = H^{10}Si^3O^{11} = 3\,SiO^2 . 5\,H^2O$. Pour voir jusqu'à quel point cette formule est acceptable, ramenons la composition moléculaire donnée par l'analyse à $3\,SiO^2$:

SiO^2 . .	3	H^2O . .	0,311	
PbO . .	3,038	MgO . .	0,027	RO = 5,346
MnO . .	0,317	CuO . .	0,002	
CaO . .	1,638	R^2O . .	0,015	

Il y a un léger excès de 0,346 RO; mais on voit surtout *qu'il n'est pas permis de négliger* H^2O *dans la formule : elle doit y entrer pour autant de molécules que* MnO (*); on pourrait écrire

$$3\,SiO^2 . 3\,PbO . 2(Ca, Mn, H^2)O, \qquad (15)$$

avec les rapports

$$Ca : Mn : H^2 = 5 : 1 : 1. \qquad (\alpha)$$

La correspondance est médiocre en ce qui concerne PbO :

	SiO^2	PbO	CaO	MnO	H^2O
	18,89	70,04	8,40	2,13	0,54 = 100
Anal.	18,33	68,80	9,49 (**)	2,29	0,57 = 99,48.

En réalité, les valeurs (*b*) obtenues pour x prouvent que, *tant que l'on suppose l'eau combinée,* une bonne dérivation exige l'emploi de l'acide m^1o^3, ou encore mieux de m^1o^4.

(*) Le poids d'une molécule de MnO étant environ quadruple de celui d'une molécule de H^2O, 2,29 °/₀ de MnO et 0,57 °/₀ de H^2O représentent le même nombre de molécules.

(**) On a transformé les 0,11 de MgO en CaO.

On arrive à des formules analogues à (15) :

$$m^1o^3 : \quad 4SiO^2 . 4PbO . 3(Ca, Mn, H^2)O \qquad (16)$$

$$m^1o^4 : \quad 5SiO^2 . 5PbO . 4(Ca, Mn, H^2)O \qquad (17)$$

Suivant que l'on y suppose les rapports (α), ou bien **11 : 2 : 2**, on arrive à la correspondance qui suit :

	m^1o^3		m^1o^4		ANALYSE.
SiO^2.	18,64	18,63	18,49	18,48	18,33
PbO.	69,08	69,05	68,52	68,48	68,80
CaO.	9,52	9,56	9,86	10,12	9,49
MnO	2,56	2,20	2,50	2,33	2,29
H^2O.	0,60	0,56	0,63	0,59	0,57
Ca : Mn : H^2 . .	5 : 1 : 1	11 : 2 : 2	5 : 1 : 1	11 : 2 : 2	

Hyalotékite.

Cette substance a été placée par M. Dana dans les silicates intermédiaires, probablement pour la rapprocher des deux autres silicates de plomb dont nous venons de nous occuper ; en réalité, le nombre de molécules de RO y est un peu inférieur à celui de SiO^2, de sorte que l'on a affaire à un métasilicate ou à un composé encore moins riche en silice. C'est ce que d'ailleurs indiquent les formules proposées. L'analyse de Lindström donne :

SiO^2 39,47	B^2O^3 3,73	PbO 25,11	MnO 0,29	K^2O 0,89	Fl^2 0,99
	Al^2O^3 0,18	BaO 20,08	MgO 0,09	Na^2O 0,17	Cl^2 0,06
	Fe^2O^3 0,06	CaO 7,82	CuO 0,09	H^2O 0,59	
		GlO 0,75			

et, en molécules,

SiO^2 0,658	B^2O^3	0,053	PbO	0,112	MnO	0,0041
	Al^2O^3	0,0017	BaO	0,131	MgO	0,0023
	Fe^2O^3	0,0004	CaO	0,140	CuO	0,0011
	R^2O^3 =	0,0551	GlO	0,030		
				RO =		0,4205

K^2O	0,0095	Fl^2	0,0261
Na^2O	0,0027	Cl^2	0,0008
H^2O	0,0328		0,0269
R^2O =	0,045		

ou bien

SiO^2	R^2O^3	RO	R^2O	Fl^2
12	1	7,67	0,82	0,49
		8,49		

La première formule approximative proposée par M. Dana, en négligeant le fluor et en forçant le nombre de molécules de RO, pour arriver à un métasilicate, s'approche assez bien :

$$R^9B^2(SiO^3)^{12} = 12SiO^2.B^2O^3.9RO.$$

La seconde formule, dans laquelle on a inscrit, par erreur, la moitié du fluor qu'elle comporte, doit être écrite

$$12SiO^2.B^2O^3.8RO(*).Fl;$$

elle est un simple tableau des résultats de l'analyse.

* * *

On peut essayer d'interpréter l'analyse, en tenant compte du fluor, en supposant que ce corps se trouve engagé dans la substance à l'état de $R''<^{Fl}$ formant des bases $(RFl)^2O$.

(*) 8RO s'approche tout aussi bien que 9RO, vu que l'analyse donne 8,5.

Dans ce cas 0,49 Fl^2 correspondent à 0,49 $(RFl)^2O$, et il reste

$$RO = 7,67 - 0,98 = 6,69;$$

on a donc

SiO^2	R^2O^3	RO	R^2O	$(RFl)^2O$
12	1	6,69	0,82	0,49.
			8	

On arrive donc exactement à 12 SiO^2 . R^2O^3 . 8 RO, c'est-à-dire à l'acide 12 SiO^2 . 11 H^2O. Pour obtenir un métasilicate par cette méthode, il faut donc forcer la quantité de bases. La formule

$$\left(\frac{R^2_{VI} \,.\, R^7_{//}}{R^2 \,.\, R_{//}Fl}\right)^2 (SiO^3)^{25} \qquad (18)$$

donne une correspondance passable. On a supposé, dans le tableau qui suit, $R^2_{VI} = Bo^2 : Al^2 = 25 : 1$; quant aux rapports entre les différents protoxydes, ils sont inscrits en tête de chaque colonne :

	Ba : Ca : Pb : Gl = 4 : 4 : 4 : 1 H : K : Na = 11 : 3 : 1	Ba : Ca : Pb : Gl = 9 : 9 : 7 : 2 H : K : Na = 11 : 3 : 1	Ba : Ca : Pb : Gl = 5 : 5 : 4 : 1 H : K + Na = 2 : 1	ANALYSE.
	—	—	—	—
SiO^2 . .	37,9	38,8	38,4	39,47
B^2O^3 . .	3,7	3,8	3,7	3,73
Al^2O^3. .	0,2	0,22	0,22	0,18
BaO . .	19,4	21,5	21,3	20,08
CaO . .	7,1	7,9	7,8	7,82
PbO . .	28,2	24,3	24,8	25,11
GlO . .	0,79	0,78	0,7	0,75
H^2O . .	0,73	0,74	0,67	0,59
K^2O . .	1,03	1,06	1,74 (*)	0,89
Na^2O . .	0,23	0,23		0,17
Fl^2 . . .	1,04	1,07	1,06	1,02 (**)
— O . .	— 0,44	— 0,45	— 0,45	

(*) On a transformé Na^2O en K^2O.
(**) Y compris Cl^2 transformé en Fl^2.

* * *

Enfin, on pourrait supposer que le fluor remplace non des OH des hydroxydes alcalino-terreux, mais directement des OH de l'acide métasilicique $O = Si <^{OH}_{OH}$, formant $O = Si <^{Fl}_{OH}$ ou $O = Si <^{Fl}_{OR}$. Par cette méthode, on arrive à une formule en parfaite concordance avec l'analyse.

En effet, la composition moléculaire

$$12SiO^2 . R^2O^5 . 7,89\,RO . 0,6H^2O . 0,49\,Fl^2$$

donnée par l'analyse, peut s'écrire, en scindant l'eau en $0,11 + 0,49$,

$$12SiO^2 . R^2O^5 . 8\,RO . \frac{1}{2}H^2O . \frac{1}{2}Fl^2,$$

correspondant à

$$R^2_{VI}\,R^8(SiO^5)^{11} + O = Si <^{Fl}_{OH} . \qquad (19)$$

Dans cette formule,

$$R^2_{VI} = Bo^2 : Al^2 = 25 : 1$$

$$R = Ba : Ca : Pb : Gl : K^2 : H^2 = 22 : 23 : 19 : 5 : 2 : 1. \qquad (\beta)$$

La formule (19) est la reproduction exacte de l'analyse, comme le confirme d'ailleurs la correspondance qui suit :

		Analyse.			Analyse.
SiO^2 . .	39,24	39,47	PbO . .	25,59	25,11
B^2O^5 . .	3,67	3,73	GlO . .	0,76	0,75
Al^2O^5 . .	0,22	0,18	K^2O . .	1,14	1,15
BaO . .	20,39	20,08	H^2O . .	0,60	0,59
CaO . .	7,80	7,82	Fl . . .	1,04	1,02
			—O . .	— 0,45	
				100,00	99,90

Cependant cette formule ne peut être acceptée : en effet, si

$O = Si < {}^{Fl}_{OH}$ est décomposable par l'action de la chaleur, nous aurions, comme perte au feu,

$$\frac{1}{9} H^2O\ (*) + HFl = 22;$$

si, au contraire, le composé fluoré est stable, il ne se dégagerait par la chaleur que $\frac{1}{9} H^2O = 2$; dans aucun cas, nous aurions, comme perte

$$\frac{1}{9} H^2O + \frac{1}{2} H^2O = 11,$$

conformément à l'analyse.

On pourrait arriver à un bon résultat, quoique complexe, en supposant que le fluor remplacât en même temps quelques OH des hydroxydes et quelques OH de l'acide métasilicique, mais il faudrait savoir d'abord si le minéral dont il s'agit perd de l'acide fluorhydrique par l'action de la chaleur et, dans l'affirmative, combien il en perd. Disons, en terminant, que M. Dana cite une autre analyse qui a donné 0,82 °/₀ de perte au feu, au lieu de 0,59 avec des proportions presque identiques des autres constituants.

(*) C'est la proportion d'eau contenue dans la première partie de la formule 19, d'après (β).

Importance de la « perte au feu » ; interprétation de la composition des silicates intermédiaires contenant du fluor.

Dans ce qui précède, nous avons essayé minutieusement de dégager la formule de quelques silicates de leurs analyses; on a pu voir que les résultats ne laissent que d'être complexes ou douteux. Cela prouve, pensons-nous, que le chimiste devrait déterminer ce qu'on appelle la *perte au feu* avec beaucoup plus de soin que l'on y apporte ordinairement : les poids moléculaires de l'eau et de l'acide fluorhydrique sont tellement petits par rapport à ceux des autres constituants, que $\frac{1}{2}$ °/₀ de différence dans leur détermination peut rendre ininterprétable la constitution du silicate. — Je pense qu'ordinairement on se contente, après dessiccation, de chauffer au rouge la substance et de constater le poids qu'elle a perdu. Mais de quoi se compose-t-elle, la *perte au feu?* — Si l'on constatait dans le dégagement la présence de HFl, on pourrait ramener, je pense, la si grande variété d'acides admis dans les silicates à être moins nombreux :

Si l'on suppose que dans un acide silicique un ou plusieurs OH soient remplacés directement par Fl, l'analyse donnera pour le sel qui en dérive une proportion moindre de bases par rapport au cas où tous les OH eussent été remplacés par des radicaux métalliques, de manière que l'on arrive à un acide $SiO^2 . nH^2O$ dans lequel n est *plus petit qu'en réalité.* Par cette observation, on peut ramener les silicates les moins riches en base (polysilicates et *disilicates* de M. Dana) à des *métasilicates* et les *silicates intermédiaires* $m^z o^1$ à des *orthosilicates.* Je ne donnerai ici que quelques exemples, me réservant de préciser plus tard l'idée que j'émets.

a) Partons de l'acide métasilicique $O = Si < \begin{matrix} OH \\ OH \end{matrix}$ et considérons un métasilicate de Ca et Na dans lequel un groupe OH soit remplacé par Fl; nous obtenons

$$O = Si \underset{ONa}{\overset{|}{}} - OCaO - Si \underset{Fl}{\overset{|}{}} = O; \qquad (20)$$

l'analyse donnerait pour ce corps : $2SiO^2 . CaO . NaFl$, qui sera ramené, d'après les idées actuelles, à

$$(CaFl)' NaSi^2O^5,$$

c'est-à-dire à l'acide disilicique

$$H^2Si^2O^5 = 2SiO^2 . H^2O.$$

Comme la molécule peut se compliquer indéfiniment, tant qu'il s'agit d'un métal polyvalent, on obtient des corps de moins en moins riches en fluor et paraissant dériver d'acides ayant pour formule

$$H^{2n-2}Si^nO^{3n-1} = nSiO^2 . (n-1)H^2O \ (*), \qquad (\gamma)$$

acides qui s'appprochent de plus en plus de l'acide métasilicique à mesure que n augmente; en réalité, ce ne seraient que des métasilicates, avec un OH de l'acide remplacé par Fl. Tels que nous les avons conçus, ces corps ne dégageraient pas de HFl par l'action de la chaleur; mais, si un OH est resté libre, le dégagement aura lieu. C'est le cas, pensons-nous, pour la hyalotékite, qui a donné à l'analyse (voir p. 28) :

$12SiO^2 . 11RO$, résultat correspondant à $n = 12$ dans la formule (γ); la formule (19), écrite en une seule molécule, d'après le type de la formule (20), devient

$$HO - Si \underset{O}{\overset{\|}{}} - O . B^2(SiO^3)^{10}R^8_{/}O - Si \underset{O}{\overset{\|}{}} - Fl.$$

(*) $n = 3$ donne l'acide de l'orthose $H^4Si^3O^8$.

Pour que cette formule soit acceptable, il faudrait que le silicate dont il s'agit dégage environ 1 °/₀ de HFl par l'action de la chaleur, et c'est ce qui reste à vérifier.

b) Partons, en second lieu, de l'acide orthosilicique

$$\begin{array}{c} \mathrm{OH} \\ | \\ \mathrm{HO-Si-OH.} \\ | \\ \mathrm{OH} \end{array}$$

Si nous prenons une seule molécule de sel double de calcium et sodium, en remplaçant un OH de l'acide par Fl, nous obtenons

$$\mathrm{SiO^2 . CaO . NaFl = (CaFl)'NaSiO^3},$$

c'est-à-dire, en apparence, un métasilicate. Pour deux molécules, il vient

$$\begin{array}{c} \mathrm{O} \\ | \\ \mathrm{Ca} \\ | \\ \mathrm{O} \end{array} \!\!\diagdown\!\!\diagup\!\! \begin{array}{c} \\ \mathrm{Si-O.Ca.O-Si} \\ \\ \end{array} \!\!\diagdown\!\!\diagup\!\! \begin{array}{c} \mathrm{O} \\ | \\ \mathrm{Ca} \\ | \\ \mathrm{O} \end{array} = 2\,\mathrm{SiO^2} . 3\,\mathrm{CaO} . \mathrm{NaFl}$$

$$= \mathrm{Ca^2(CaFl)'NaSi^2O^7},$$

paraissant dériver de l'acide intermédiaire $\mathrm{H^6Si^2O^7} = m^1o^1$. En prenant n molécules, on obtient le sel

$$n\mathrm{SiO^2} . (2n - 1)\mathrm{CaO} . \mathrm{NaFl} = n\mathrm{SiO^2} . (2n - 2)\,\mathrm{CaO} . (\mathrm{CaFl})'\mathrm{NaO},$$

paraissant dériver de l'acide intermédiaire

$$n\mathrm{SiO^2} . (2n - 1)\,\mathrm{H^2O} = m^1o^{n-1},$$

c'est-à-dire d'un acide compris entre m^1o^1 et l'acide orthosilicique et s'approchant de plus en plus de ce dernier à mesure que n augmente.

Plus généralement, en remplaçant dans n molécules p groupes OH par Fl et p groupes OH par ONa, on arrive à

$$n\mathrm{SiO^2} . (2n - p)\mathrm{R_{,,}O} . p\mathrm{NaFl},$$

paraissant dériver de l'acide intermédiaire

$$n\,SiO^2\,.\,(2n-p)\,H^2O = m^pO^{n-p}.$$

* * *

C'est en opérant d'une façon analogue, mais en sens inverse, que M. Groth est parvenu à ramener la topaze, que l'on considérait comme un subsilicate dérivant de l'acide $SiO^2\,.\,5\,H^2O$, avec la formule

$$5\,Al^2SiO^5 + Al^2SiFl^{10},$$

à l'acide orthosilicique. Ici l'on devait enlever l'excès apparent de bases et l'on y parvient en supposant que Al^2 est partiellement engagé dans la topaze à l'état de

$$=Al^2= \quad \text{et} \quad =Al^2=,$$
$$\underset{\|}{O} \qquad\qquad \underset{\|}{Fl^2}$$

radicaux tétravalents qui n'exigent chacun pour leur saturation qu'une molécule de H^4SiO^4. M. Groth a ainsi obtenu la formule rationnelle

$$(Al^2Fl^2)^5_{IV}(Al^2O)_{IV}(SiO^4)^6,$$

identique, comme composition brute, à la formule inscrite ci-dessus.

SUR

UN NOUVEAU CURVIGRAPHE

PAR

M. Victor LEBEAU

INGÉNIEUR A LIÉGE.

SUR LES LIGNES

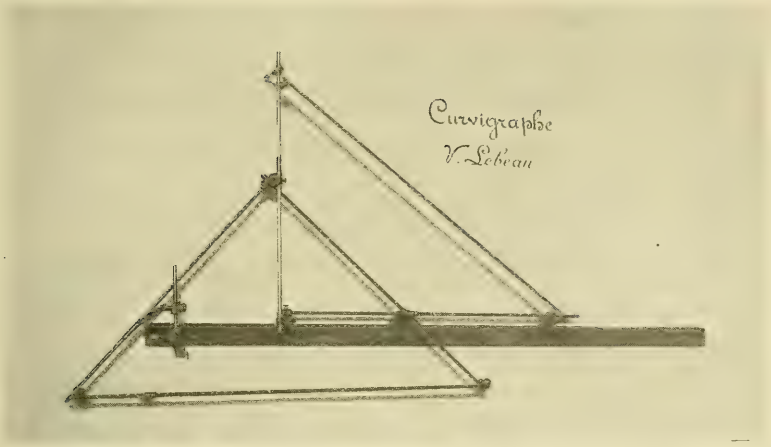
TRACÉES PAR

LE CURVIGRAPHE VICTOR LEBEAU

PAR

J. NEUBERG

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.



SUR

UN NOUVEAU CURVIGRAPHE

Le nouveau curvigraphe dont je donnerai ci-après la description, offre à la fois un intérêt pratique par l'usage que peut en faire l'industrie, et un intérêt scientifique par la contribution qu'il apporte à la cinématique.

Dans les bureaux techniques de dessin, il remplace avantageusement les pistolets en substituant, pour certaines courbes, au tracé par un certain nombre de points déterminés au préalable, un tracé continu.

Dans la construction des navires, il résout pratiquement et rapidement les problèmes ardus du tracé des coques.

Dans la construction des machines-outils, par une application judicieuse du mouvement cinématique de mon appareil, on résout les difficultés mécaniques en dirigeant l'outil pour tailler les pièces suivant les profils déterminés.

Dans la construction des turbines, des dragues, des transports aériens, des phares paraboliques, dans la gravure des cristaux, etc., il trouve également son application.

Au point de vue scientifique, l'intérêt que présente mon instrument ne le cède en rien à certains instruments de démonstration de mouvements cinématiques, car mon appareil crée toute une série de mouvements inconnus jusqu'à ce jour.

DESCRIPTION DU CURVIGRAPHE

Modèle n° 1 (pl. I). — L'instrument se compose essentiellement de deux équerres mobiles et d'une règle fixe.

La première équerre ABC est constituée par deux tubes en acier réunis par une charnière U, de façon à pouvoir faire entre eux un angle quelconque, et par un troisième tube N, servant uniquement à assurer la stabilité des deux premiers.

Sur la branche AB se meut un coulisseau D, dans lequel oscille le sommet de la seconde équerre, qui est également constituée par deux tubes en acier DE, DF, placés rectangulairement ou sous un angle quelconque, et un troisième tube M ayant le même but que le tube N.

La branche FD glisse dans un guide L, qui peut s'orienter suivant l'inclinaison variable de la branche FD; celle-ci glisse sur un point fixe O.

La branche DE peut glisser ou être calée, suivant les besoins, dans un coulisseau J, qui est relié en H par un pivot à un second coulisseau I, se calant ou glissant le long de la branche BC de la première équerre.

Le coulisseau J est disposé de façon à permettre à la branche DE de faire un angle quelconque avec BC.

La branche BC glisse le long de la règle fixe K; ce mouvement est assuré par l'intermédiaire des guides P et R.

Cette règle porte ordinairement le support W du guide L. Cependant le guide L peut se placer à différentes distances de la branche BC, au-dessus ou en dessous.

L'articulation D porte quatre douilles; dans deux de celles-ci sont fixées les branches FD et ED de la seconde équerre.

Les deux autres douilles reçoivent tour à tour une allonge G ou G_1, sur laquelle glisse un traçoir (porte-crayon ou tire-ligne), servant à dessiner certaines courbes. On peut également fixer le

traçoir en D ou en un point quelconque sur les branches DF, DE, DG ou DG_1.

Les guides P et R sont munis, à leur partie inférieure, d'index V, qui servent à placer le tube BC suivant une droite donnée YY_1.

Nous avons cherché à rendre l'instrument aussi léger que possible, tout en lui assurant une rigidité absolue.

Ainsi, les supports S empêchent la flexion des branches, et de petites roulettes placées sur les guides P, Q, R rendent l'appareil très sensible.

Modèle n° 2 (pl. II). — La description donnée ci-dessus du curvigraphe n° 1 s'applique aussi au curvigraphe n° 2, car celui-ci ne diffère du premier que par sa construction; le principe et le fonctionnement sont les mêmes. Son but principal est de tracer, d'un *seul trait*, les deux branches de certaines courbes, tandis que le premier est construit spécialement pour tracer une seule branche de courbe.

Fonctionnement de l'appareil.

I. — *Appareil conchoïdal général.*

La branche DE étant calée dans le coulisseau J et le coulisseau I étant libre sur la branche BC, on fait glisser cette branche le long de la règle K suivant YY_1. DF glisse alors sur le point O, et la partie DH reste de longueur constante. Dans ces conditions, le mouvement du point D résulte de son déplacement le long de BA en même temps que ce côté BA se déplace parallèlement à lui-même.

Dans les explications ultérieures, nous désignerons quelquefois par AB la parallèle DB_1 à AB menée par le centre de la douille; en réalité, ces droites AB, DB_1 sont distinctes.

En définitive, le mouvement du plan de l'équerre FDE est le suivant : Une droite DF de ce plan glisse sur un point fixe O, tandis qu'un point déterminé H du même plan parcourt une droite BC. Ce mouvement peut être appelé *mouvement conchoï-*

dal général, et l'appareil prendra le nom d'*appareil conchoïdal général*. Les *constantes* de l'instrument sont la distance a de O à BC, et la distance $HD = a_1$ de H à DF.

Les figures 1 et 2 (pl. III) donnent la courbe tracée par le point D, le *pancappa*. Pour avoir le pancappa complet, il faut supposer dans la figure 1 que l'angle ODH puisse prendre la position symétrique de sa position actuelle, tant par rapport à la droite OH que par rapport à OY.

Je réalise les positions au-dessous de MX au moyen du curvigraphe n° 2.

Le pancappa présente deux variétés différentes suivant que $a < a_1$ (fig. 1) ou que $a > a_1$ (fig. 3).

Un traçoir placé sur la règle OD décrit une conchoïde du pancappa, ou un *pancappa oblique* (fig. 4 et 5).

Remarquons qu'on ferait tracer la même courbe par le point D en changeant convenablement l'angle des deux branches DF, DE du curvigraphe.

Un traçoir placé sur la branche DE décrit une courbe qu'on peut appeler *orthoconchoïde du pancappa* lorsque l'angle FDE est droit (fig. 6.)

Cas particuliers :

1° Si $a = a_1$, l'appareil peut être appelé *appareil cissoïdal*. On obtient dans ce cas un grand nombre de courbes classiques.

Le point D décrit une *strophoïde droite* (fig. 7).

Le milieu de DH décrit une *cissoïde de Dioclès* (fig. 8).

Les autres points de DH décrivent des courbes qui sont des *orthoconchoïdes de la strophoïde* (fig. 9) ou des *conchoïdes de Sluse*.

Les points de OD décrivent des conchoïdes de la strophoïde droite ou des *strophoïdes obliques* (fig. 9).

La courbe décrite par un point de la perpendiculaire élevée au milieu de DH est une *ophiuride*.

La figure 10 réunit plusieurs de ces courbes.

2° La constante $DH = a_1$ est réduite à zéro.

Pour réaliser le mouvement qui correspond à cette hypothèse,

nous enlevons la branche ED pour la placer en DG_1, prolongement de DF.

Fixons le coulisseau D sur la branche AB; dans ces conditions, la droite DF glisse encore sur le point O pendant que le point D parcourt une parallèle à BC.

Deux traçoirs placés sur OG_1 à égale distance de D, décrivent les deux branches d'une *conchoïde de Nicomède* (fig. 11).

Si $a = b$, on obtient une *conchoïde cuspidale* (fig. 12).

Si l'on place deux traçoirs à égale distance de D sur une tige perpendiculaire en D à OD, on décrit les deux branches d'une *orthoconchoïde de la droite* (fig. 13; $a_1 = b$).

3° Supposons maintenant $a = o$ et a_1 quelconque; autrement dit, le point fixe O de l'appareil général se trouve sur la droite BC que parcourt le point H.

La courbe décrite par le point D a reçu le nom de *cappa* (fig. 14).

La courbe décrite par un traçoir M placé sur OD décrit une *conchoïde du cappa*, appelée également *cappa oblique* (fig. 15).

Le point D décrirait la même courbe, si l'on changeait l'angle des branches DE, DF.

Un point M_1 de la branche DH décrit une *orthoconchoïde du cappa* (fig. 16).

II. — *Appareil à projection constante.*

La branche DE de l'équerre EDF coulisse dans le guide J, tandis que le coulisseau I est calé sur la branche BC de l'équerre ABC.

L'angle ABC peut avoir une valeur quelconque ω, et l'angle FDE une valeur quelconque λ.

Dans ces conditions, le mouvement du plan de l'équerre FDE est le suivant :

Une droite FD de ce plan glisse sur un point fixe O, tandis qu'une seconde droite DE de ce plan se déplace de manière que le segment DH de cette ligne compris entre D et la droite

fixe BC se projette sur BC, parallèlement à la direction fixe AB, suivant une longueur constante $B_1H = 2$ p.

La branche BC est graduée en millimètres pour déterminer immédiatement le paramètre 2 p de la courbe à tracer.

On peut disposer ici de quatre constantes, qui sont : les angles ω et λ, la longueur 2 p et la distance a de O à BC.

Nous distinguons deux cas principaux suivant que les angles ω et λ sont égaux ou inégaux; dans le premier cas, nous avons un *parabolographe*, dans le second, un *hyperbolographe*.

Parabolographe.

La disposition la plus simple est celle où $\omega = \lambda = 90°$, $a = o$ (fig. 17); O sera le sommet et BX l'axe de la parabole décrite par le point D.

Supposons toujours $\omega = \lambda = 90°$, mais le point O n'est plus situé sur BX. Le point D décrit encore une parabole, l'axe de cette courbe est parallèle à BX et passe à égale distance de BX et O (fig. 18).

Le cas où les angles ω et λ ont une valeur commune quelconque, est représenté dans la figure 19.

Dans les figures 18 et 20, nous avons indiqué le tracé d'une *orthoconchoïde de la parabole* par rapport à un point quelconque de la courbe ou par rapport à son sommet.

Hyperbolographe.

a) Lorsque les angles ω et λ sont inégaux, le point D décrit une hyperbole (fig. 21).

b) On peut supposer l'angle $\lambda = o$ ou 180°, c'est-à-dire les droites OD et DH appliquées sur une même droite.

Voici comment on dispose alors le curvigraphe :

On enlève la branche FD pour la placer en DG; on place le guide L sur la branche DG, soit en O_1, et l'on donne à l'angle ABC une valeur quelconque.

Le coulisseau I est fixé sur la branche BC, la branche DE glisse dans le coulisseau J et sur le point O_1, tandis que le point D est astreint à glisser le long de AB.

Dans ces conditions, on a une droite DE glissant sur un point fixe O_1 de manière que le segment DH compris entre un point déterminé D et la droite fixe BC se projette sur celle-ci, parallèlement à la direction donnée AB, suivant une longueur donnée 2 p.

Le point D décrit maintenant une hyperbole dont une asymptote est BC et dont l'autre est parallèle à AB (fig. 22).

Nous avons figuré l'appareil décrivant une hyperbole dont on donne les asymptotes TX et TY, et le sommet O.

Quand on donne avec les asymptotes TX, TY un point quelconque S (fig. 22), on place le point O_1 de l'appareil en S, la branche BC de l'instrument sur l'asymptote TX; la projection constante doit être égale à la parallèle *e* à TX, menée par S et limitée à TY.

La figure 23 représente le curvigraphe décrivant une hyperbole équilatère, l'angle ABC est droit.

N. B. — Au moyen de quelques modifications faciles, notre curvigraphe peut encore servir à tracer d'autres courbes; par exemple, la figure 24 indique le tracé d'un arc d'ellipse.

M. Neuberg, professeur à la Faculté des sciences de l'Université de Liége, a bien voulu prendre connaissance de mon invention et des résultats obtenus. Il m'a même signalé quelques compléments intéressants indiqués dans les figures 19 et 21, m'a assisté de ses conseils précieux pour la rédaction de la note descriptive de mon curvigraphe, et s'est offert de présenter cette note à la Société royale des sciences de Liége, en y joignant une théorie complète de l'appareil et des développements sur les courbes qu'il sert à tracer.

Que M. Neuberg agrée mes sincères remerciements pour ses encouragements et son concours!

SUR LES LIGNES

TRACÉES PAR

LE CURVIGRAPHE VICTOR LEBEAU

Préliminaires.

1. Le tracé mécanique des lignes planes a fait l'objet de nombreuses recherches, et une foule d'instruments ont été proposés dans ce but (*). Je vais rappeler quelques-uns de ces appareils pour assigner sa place au nouveau curvigraphe inventé par M. V. Lebeau.

2. L'ellipsographe le plus simple consiste en une règle dont deux points A_1, B_1 se meuvent sur deux règles fixes Ox, Oy. Appelons P le plan fixe xOy, et P_1 un plan invariablement attaché à la règle A_1B_1 et glissant avec elle sur le plan P. Le mouvement de P_1 sur P revient à faire glisser deux points A_1, B_1 de P_1 sur deux droites Ox, Oy ; on peut l'appeler *mouvement à deux ornières fixes.*

(*) Voir à ce sujet : A. v. Braunmühl, *Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts.*

Cette étude a paru dans le *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente;* herausgegeben von Walther Dyck. München, Wolf und Sohn, 1892.

Citons encore l'excellent exposé de la théorie des systèmes articulés dans les *Leçons de Cinématique,* par Gabriel Koenigs. Paris, Hermann, 1897. On peut également consulter mes *Conférences sur quelques systèmes de tiges articulées.* Liége, Gnusé, 1886.

3. Désignons par V_1 la circonférence circonscrite au triangle OA_1B_1 ; elle est fixe dans le plan P_1. Soit V la circonférence tracée, dans le plan P, de O comme centre avec un rayon double de celui de V_1. Le déplacement de P_1 sur P peut encore s'obtenir en faisant rouler (sans glissement) V_1 sur V (*mouvement de Cardan*).

Tous les points de V_1 se meuvent sur des diamètres de V, les autres points de P_1 décrivent des ellipses. Les diamètres de V_1 enveloppent des hypocycloïdes à quatre rebroussements; les autres droites de P_1 roulent sur des courbes parallèles à ces hypocycloïdes (*).

4. Considérons le mouvement du plan P par rapport au plan P_1. Pour le réaliser, il suffit de faire glisser les droites Ox, Oy sur les points A_1, B_1 supposés fixes (*mouvement à deux ornières mobiles*), ou de faire rouler la circonférence V sur la circonférence V_1 (*mouvement de Cardan renversé*).

Le point O décrit sur P_1 la circonférence V_1; tout autre point de P parcourt un limaçon de Pascal. Les droites menées par O dans le plan P pivotent sur des points fixes de V_1; les autres droites de P enveloppent des circonférences (**).

5. On peut déplacer un plan P_1 sur un plan fixe P en assujettissant un point A_1 de P_1 à décrire sur P une circonférence de centre A et un autre point B_1 de P_1 à parcourir une droite b de P. Un tel mouvement est réalisé par le mécanisme *bielle-manivelle*.

Si b passe par A et que $AA_1 = A_1B_1$, le mouvement de P_1 est le même qu'aux §§ 2 et 3. Le mouvement inverse revient à faire glisser une droite b de P sur un point fixe B_1 de P_1 en même temps qu'un point A de P décrit une circonférence

(*) Voir à ce sujet MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 9, ou *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1878, p. 321.

(**) Il résulte de là que le mouvement de P sur P_1 peut encore être obtenu en faisant glisser les côtés d'un angle constant sur deux circonférences fixes. Voir MANNHEIM, *Géométrie cinématique*, pp. 7 et 13, ou *Mathesis*, 1881, p. 43.

passant par B_1 ; il ne diffère pas du mouvement à deux ornières mobiles.

6. Enfin, deux points A_1, B_1 de P_1 peuvent être assujettis à décrire sur P deux circonférences de centres A, B. Ce déplacement est celui d'un plan invariablement lié à une bielle qui est articulée à deux manivelles, ou d'un plan lié à une tige d'un quadrilatère articulé AA_1BB_1 qu'on déforme après avoir fixé la tige opposée.

A cause de ce qui va suivre (§ 9), j'insisterai sur le *contre-parallélogramme articulé*. On appelle ainsi un quadrilatère articulé ABB_1A_1 dont deux tiges opposées AB, A_1B_1 sont les côtés non parallèles d'un trapèze isocèle, et dont les deux autres AA_1, BB_1 sont les diagonales du trapèze. Si l'on fixe la tige AB, le point d'intersection des droites AA_1, BB_1, pendant la déformation du quadrilatère, décrit une ellipse ε sur le plan fixe P et une ellipse égale ε_1 sur un plan P_1 entraîné avec A_1B_1; le mouvement de P_1 sur P revient à faire rouler ε_1 sur ε; les points de P_1 engendrent des podaires d'ellipse. Supposons ensuite qu'on déforme le quadrilatère articulé après avoir fixé la tige AA_1 ; le mouvement d'un plan P_1 lié à la tige BB_1 revient maintenant à faire rouler une hyperbole sur une hyperbole égale; les points de P_1 décrivent des podaires d'hyperbole.

Appareil conchoïdal.

7. Lorsque un plan P_1 glisse sur un plan fixe P (pl. XI, fig. 1), de manière qu'un point O_1 de P_1 décrive une droite d de P en même temps qu'une droite d_1 de P_1 pivote sur un point fixe O de P, je dirai que P_1 est animé d'un *mouvement conchoïdal* (*). Ce déplacement est donc réglé par une ornière fixe d et une ornière mobile d_1. Il a été signalé pour le tracé de certaines

(*) M. Habich a employé le même terme dans le cas où O_1 est situé sur d_1 et décrit une courbe quelconque. Voir *Les Mondes*, de l'abbé Moigno, t. XIII, 1866, p. 307, et t. XIV, 1867, p. 1.

courbes : par Nicomède pour la conchoïde de la droite; par Newton pour le cappa et la cissoïde; par Chasles pour la strophoïde (*). M. V. Lebeau a eu le mérite d'inventer un mécanisme vraiment pratique, qui réalise ce mouvement.

Soient $OA = a$, $O_1A_1 = a_1$ les perpendiculaires abaissées des points O, O_1 respectivement sur d, d_1; la construction du curvigraphe permet de varier ces quantités. Pour indiquer leur rôle, je dirai : l'*appareil conchoïdal* (a, a_1), le *mouvement conchoïdal* (a, a_1).

Le mouvement inverse, c'est-à-dire celui de P par rapport à P_1, correspond évidemment à l'appareil (a_1, a).

8. Je prendrai pour axes coordonnés, dans le plan P, les droites Ox, OA, respectivement parallèle et perpendiculaire à d; pour axes, dans le plan P_1, une parallèle O_1x_1 et une perpendiculaire O_1y_1 à d_1. Quand il sera fait usage de coordonnées polaires, le pôle et l'axe polaire seront respectivement O et Ox, O_1 et O_1x_1.

Avant d'étudier le curvigraphe général (a, a_1), je traiterai les cas particuliers les plus remarquables :

a) L'appareil (a, a);

b) L'appareil (a, o);

c) L'appareil (o, a).

On pourrait les appeler, respectivement, *appareil cissoïdal*, *appareil de Nicomède*, *appareil de Barrow*.

Appareil (a, a).

9. Si $OA = O_1A_1$ (fig. 2), le quadrilatère OAO_1A_1 est un contre-parallélogramme qui a pour axe de symétrie la droite joignant les points de concours C, E des côtés opposés (E est le point de rencontre de d et d_1). Le centre instantané de rotation est à l'intersection I des perpendiculaires élevées en O sur d_1 et

(*) *Aperçu historique*, p. 411. Chasles indique que les trajectoires des points de P_1 sont des podaires de parabole, mais sans préciser nettement les conditions du tracé.

en O_1 sur d; il est situé sur l'axe de symétrie CE. Comme $IO = IO_1$, le point I décrit, dans le plan P, une parabole V qui a pour foyer O, pour directrice d; dans le plan P_1, il parcourt une parabole V_1 ayant O_1 pour foyer, d_1 pour directrice. Ces deux courbes sont à chaque instant du mouvement symétriques par rapport à leur tangente commune IC.

Il résulte de là (comparer § 6) que le *mouvement conchoïdal* (a, a) *revient à faire rouler une parabole* V_1 *sur une parabole égale* V.

10. On a $AE = EA_1$; par conséquent, le *point* A_1 *décrit une strophoïde droite* ayant un point double en A, pour asymptote la parallèle B_2B, à d menée à la distance a. La figure $OAO'_1A'_1$ montre comment on obtient la boucle de la courbe.

Un point quelconque D_1 *de* d_1 *décrit une strophoïde oblique.* En effet, si l'on prend sur d la distance $AD = A_1D_1$, la droite OD est fixe, et $ED_1 = DE$. On peut remarquer la proposition suivante :

Lorsque un angle constant OD_1O_1 *se meut de manière que le côté* (indéfini) OD_1 *glisse sur un point fixe* O *et qu'un point déterminé* O_1 *de l'autre côté parcourt une droite fixe* d, *le sommet de l'angle décrit une strophoïde, pourvu que les distances de* O *à* d *et de* O_1 *à* OD_1 *soient égales entre elles.*

11. Soient (fig. 2) M, M_1 deux points symétriques par rapport à CI, le premier fixe, le second entraîné avec le plan P_1; ils seront toujours symétriques par rapport à la tangente commune au point de contact de V et V_1. Le milieu M_2 de la droite MM_1 décrit la podaire de M par rapport à V, et le point M_1 parcourt une courbe homothétique à cette podaire.

Ainsi, *les trajectoires des points du plan* P_1 *sont des podaires de parabole.* En particulier, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, les podaires des points de la directrice d'une parabole sont des strophoïdes. Nous retrouverons le même résultat plus loin.

12. Qu'il me soit permis de revenir ici sur des notions que j'ai déjà développées ailleurs, et de les compléter.

Considérons la podaire d'un point quelconque M (fig. 5) par rapport à une parabole qui a pour foyer O, pour sommet S; la tangente en S sera désignée par δ. En un point quelconque C de δ, élevons CI perpendiculaire à CO, puis projetons M en M′ sur CI et en N sur CO. M′ est un point de la podaire de M, et le point M′ appartient à la circonférence Δ de diamètre OM. Prenons encore sur OC le segment $Om = MM' = NC$; les points M′, m décriront des courbes égales. Pour une raison facile à comprendre, je dirai que le point m engendre une cissoïdale du point O par rapport à Δ et δ. Il suffira maintenant d'étudier les cissoïdales.

13. Soient $Om = r$, $SOm = \theta$ les coordonnées polaires de m, et $OM = b$, $SOM = \alpha$ celles de M; la distance OS est représentée par $\frac{1}{2}a$. On trouve facilement

$$r = OC + NO = \frac{OS}{\cos SOC} + OM \cos NOM;$$

d'où l'équation de la cissoïdale (m) en coordonnées polaires

$$r = \frac{a}{2\cos\theta} - b\cos(\alpha - \theta),$$

et en coordonnées rectangulaires

$$(a - 2x)(x^2 + y^2) = 2bx(x\cos\alpha + y\sin\alpha),$$

les axes coordonnés étant OS et la perpendiculaire OQ.

Lorsque M est sur l'axe de la parabole, on trouve

$$r = \frac{a}{2\cos\theta} - b\cos\theta, \quad (a - 2x)(x^2 + y^2) = 2bx^2,$$

b étant positif ou négatif suivant que M est situé sur OS ou sur Ox. La cissoïdale est maintenant *droite;* dans les autres cas, elle est *oblique.*

On voit que *les podaires de parabole sont des cubiques circulaires unicursales.*

14. Un point M extérieur à la parabole est un *point double* de sa podaire, avec deux tangentes perpendiculaires aux tangentes menées de M à la parabole; en particulier, la podaire d'un point quelconque de la directrice possède un nœud rectangulaire.

La podaire d'un point M situé sur la parabole présente un *rebroussement* avec une tangente normale à la parabole.

Enfin, un point intérieur à la parabole est un *point isolé* de sa podaire.

On arrive aux mêmes conclusions en considérant la cissoïdale (fig. 4) d'un point O par rapport à une circonférence Δ et une droite AA′ qu'on suppose successivement couper Δ en deux points réels, ou tangente ou extérieure. Par exemple, dans la première hypothèse, une droite ODE menée dans l'angle AOA′ donne un point F de la cissoïdale qui est extérieur à Δ; les droites OA, OA′ donnent le point O et y touchent la cissoïdale; la tangente en O à Δ détermine un point D″ de la courbe appartenant à l'asymptote AA′; les droites menées par O dans les angles A′OD″, AOD$^{(v)}$, où D$^{(v)}$G est la parallèle à AA′ par O, conduisent à des points situés entre les parallèles AA′, OG; enfin, les droites menées par O dans l'angle D″OG rencontrent la cissoïdale au delà de la droite AA′.

15. La podaire du sommet S de la parabole (fig. 3), après une translation mesurée par SO, coïncide avec la *cissoïde de Dioclès* qui a son pôle en O et pour cercle directeur le cercle de diamètre OS (*).

(*) Pour les courbes qui figurent dans cette étude, j'ai consulté les ouvrages suivants :

Gino Loria, *Courbes planes spéciales algébriques et transcendantes*. Théorie et histoire. En italien; traduction allemande par Schutte (Leipzig, Teubner, 1903). — H. Brocard, *Notes de Bibliographie des courbes géométriques*, 2 vol. autographiés. — G. De Longchamps, *Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Équerre*. — *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales*, rédigé par Bourget, Koehler, Vazeille, De Longchamps, Levy, 1878-1898. Ce Recueil contient de très nombreux articles sur les courbes, par MM. De Longchamps, Brocard, Aubry, d'Ocagne. — *Mathesis*. Recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg, 1881-1904.

Soit AA′ la directrice de la parabole. La podaire de son pied A est égale à la cissoïdale droite qui se déduit de δ et de la circonférence de diamètre OA; δ est un diamètre de Δ. On obtient un point P de cette cissoïdale en prenant sur une sécante OCD le segment OP équipollent à CD. La circonférence de diamètre OS passe au milieu G de OD, d'où l'on déduit GP = CG, de sorte que la courbe actuelle est aussi l'*antidiamétrale* de la tangente δ par rapport à la circonférence OGS. La droite SP rencontre la perpendiculaire élevée en O sur Sx au point Q; le triangle QOP étant semblable au triangle isocèle SCP, on a QP = QO, d'où l'on conclut que la podaire de A est une *strophoïde droite*. Un raisonnement semblable ferait voir que la podaire d'un point quelconque de la directrice est une *strophoïde oblique*.

Soit W le symétrique de O par rapport à A; sa podaire est une *trisectrice de Maclaurin*. En effet, on obtient un point Z de la cissoïdale correspondante en prenant sur une droite quelconque OF menée par O, le segment OZ équipollent au segment CF compris entre δ et la circonférence de diamètre OW. La circonférence décrite sur OA comme diamètre passe au milieu D de OF, et D est aussi le milieu de CZ; d'où AZ = AC = CO. L'angle extérieur Z′AC du triangle ACZ = 2 fois l'angle ACZ, de même l'angle ACZ = 2 fois l'angle OAC; par conséquent Z′AC = 4SOC, et Z′AS = 3SAC.

Si, en même temps que l'on construit la cissoïde de Dioclès au moyen du cercle OGS, on prolonge OC d'une longueur égale à la corde OG, l'extrémité de cette longueur décrit une courbe qui a reçu le nom de *compagne de la cissoïde*. C'est la cissoïdale de O relative à la droite δ et au cercle symétrique du premier par rapport à O; cette courbe est égale à la podaire du symétrique de S par rapport à O.

La courbe décrite par le milieu de GC est la *Visiera de Peano*; elle est homothétique à la compagne de la cissoïde.

Les podaires des points de l'axe d'une parabole ou les cissoïdales droites ne diffèrent pas des *conchoïdes de Sluse* (voir *Mathesis*, 1897, p. 5), qui sont définies ainsi : *Étant donnés un*

point O *et une droite* δ (fig. 5), *joignons* O *à un point quelconque* C *de* δ *et prolongeons* OC *d'une longueur* CP *telle que* $OC.CP = K^2$, K *étant une constante; la courbe de Sluse est le lieu des points* P. Si on prolonge CO de OQ = PC, le lieu de Q est une circonférence dont le diamètre OR résulte de $SO.OR = K^2$, et comme OP = QC, on voit que le courbe (P) est la cissoïdale de O par rapport à la droite δ et à la circonférence OQR. Semblablement, si l'on prend sur CO une longueur CP′ déterminée par l'égalité $OC.P'C = K^2$, la courbe (P′) est la cissoïdale de O par rapport à δ et à la circonférence OQ′R′ dont le diamètre $OR' = K^2 : OS$.

La podaire d'un point M de la tangente au sommet d'une parabole est une cissoïdale appelée *ophiuride*. Elle présente la particularité que la droite δ passe au point diamétralement opposé au pôle sur le cercle Δ, ou que l'une des tangentes au point double est perpendiculaire à l'asymptote.

16. On peut se proposer de trouver l'enveloppe d'une droite m_1 du plan P_1. Cette courbe est le lieu des projections du centre instantané I (fig. 2) sur m_1. Soit m la symétrique de m_1 par rapport à la tangente commune IC des paraboles V, V_1 ; c'est une droite fixe du plan P. Par conséquent, le problème revient à trouver l'enveloppe de la symétrique de la droite m par rapport aux tangentes de V.

Je ne chercherai que l'enveloppe de l'axe O_1A_1 de V_1, ou l'antipodaire de la strophoïde (A_1) par rapport à O (fig. 2).

L'axe Ox étant parallèle à AO_1, l'angle A_1OO_1 est la moitié de l'angle A_1Ox, et la relation $OA_1 = A_1O_1 \cot A_1OO_1$ donne immédiatement l'équation polaire de la strophoïde (A_1) :

$$r = a \cot\frac{1}{2}\theta, \quad \text{ou} \quad r = a\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}. \tag{1}$$

On en conclut l'équation *normale* de la droite A_1O_1 :

$$x\cos\theta + y\sin\theta = a\cot\frac{1}{2}\theta. \tag{2}$$

En la combinant avec sa dérivée par rapport à θ, on trouve pour les équations paramétriques de l'enveloppe

$$x = 2a\frac{\cos^3\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}, \qquad y = a - a\frac{\cos^2\theta}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}. \tag{3}$$

Prenons pour paramètre $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = t$; l'équation (2) deviendra

$$xt^3 + (a - 2y)t^2 - xt + a = 0. \tag{4}$$

Comme elle est du 3e degré en t, l'enveloppe est de la 3e classe.

Remplaçons t par $\frac{t}{t'}$ et dérivons ensuite l'équation (4) successivement par rapport à t et à t' ; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} 3xt^2 + 2(a - 2y)tt' - xt'^2 &= 0, \\ (a - 2y)t^2 - 2xtt' + 3at'^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

L'élimination de t et t' entre les égalités (5) donne l'équation de l'enveloppe :

$$x^2(y - 3a)^2 = (x^2 + 6ay - 3a^2)[3x^2 + (2y - a)^2].$$

L'équation en coordonnées tangentielles est plus simple. En effet, si l'on identifie les équations (2) et $ux + vy + 1 = 0$, on obtient

$$\frac{\cos\theta}{u} = \frac{\sin\theta}{v} = -a\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

d'où, après élimination de θ,

$$a(u^2 + v^2)(av + 2) + v = 0.$$

Appareil (a, o) (*).

17. Considérons maintenant le mouvement conchoïdal (a, o) :

Un plan P_1 glisse sur un plan P de manière qu'une droite d_1 de P_1 pivote sur un point O de P, tandis qu'un point O_1 de d_1 parcourt une droite d de P (fig. 6).

La courbe décrite par un point quelconque N_1 de d_1 a reçu le nom de *conchoïde de Nicomède;* cependant les trajectoires de deux points N_1, N'_1 symétriques par rapport à O_1 doivent être considérées comme deux branches d'une même courbe représentée par

$$r = \frac{a}{\sin\theta} + b, \qquad \text{ou} \qquad (y-a)^2(x^2+y^2) = b^2y^2,$$

b désignant la distance O_1N_1.

18. Le centre instantané de rotation est à l'intersection I des perpendiculaires élevées en O sur d_1 et en O_1 sur d. Dans le triangle rectangle OA_1I, $OH^2 = IH.HO_1$; il en résulte que I décrit, dans le plan P, la parabole

$$x^2 = -ay. \tag{6}$$

La relation

$$O_1I = OO_1 : \cos IO_1O = OH : \cos^2 IOO'$$

conduit à l'équation polaire de la trajectoire de I dans le plan P_1 :

$$r = \frac{a}{\cos^2\theta}.$$

(*) J'avais proposé l'étude du mouvement conchoïdal (a, o) dans la question 391 de *Mathesis,* 1884, p. 247, sans connaître les recherches de M. Habich. Cette question a été résolue par M. Meurice (*Mathesis,* 1889, p. 203).

L'équation cartésienne correspondante est

$$x^4 = a^2(x^2 + y^2), \qquad \text{ou} \qquad y = \pm \frac{x}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (7)$$

Cette courbe (*) est la *campyle d'Eudoxe*, imaginée pour résoudre le problème de la duplication du cube. Pour la construire par points, prenons, sur une circonférence de centre O et de rayon a, un point fixe A et un point variable M; la tangente en M rencontre le diamètre OA en T, et la perpendiculaire en T à OA coupe le diamètre OM en un point N; la campyle est le lieu du point N. Si l'on projette M en P sur OA, P en N′ sur OM, le lieu de N′ est une courbe inverse de la campyle.

La campyle se compose de deux branches paraboliques, symétriques l'une de l'autre par rapport à O_1y_1; l'une de ces branches est étrangère au problème actuel; l'autre branche roule sur la parabole (6) qu'elle *entoure* constamment.

19. Une droite de P_1 parallèle à d_1 enveloppe une circonférence de centre O.

La droite O_1y_1 enveloppe une parabole qui a pour foyer O, pour sommet A.

Toute droite m_1 menée par O_1 dans le plan P_1 a pour enveloppe une parabole de foyer O et tangente à d.

Une droite quelconque n_1 enveloppe une courbe parallèle à la parabole enveloppe de la droite m_1 menée par O_1 parallèlement à n_1.

La trajectoire d'un point quelconque M_1 de P_1 peut être considérée comme une conchoïde de d par rapport à la parabole enveloppe de la droite O_1M_1; car O_1M_1 a une longueur constante.

Pour avoir son équation, soient b la longueur O_1M_1 et α, θ les angles $M_1O_1N_1$, O_1Ox; les coordonnées de M_1 seront

$$y = a + b\sin(\theta - \alpha), \qquad x = a\cot\theta + b\cos(\theta - \alpha). \qquad (7)$$

(*) P. Tannery, *Mémoires de Bordeaux*, 1878.

L'élimination de θ entre les égalités (7) conduit à une équation du quatrième degré.

La courbe décrite par un point de O_1y_1 pourrait être appelée *orthoconchoïde de la droite;* elle a pour équation

$$(y - a)^2(x^2 + y^2) - 2b^2y(y - a) + b^2(b^2 - x^2) = 0.$$

Appareil (o, a).

20. Barrow a indiqué pour la détermination de la tangente à une courbe une méthode qui se rapproche très sensiblement de celle du calcul différentiel, et il l'a appliquée à une courbe qu'il construit ainsi : soient OB, BZ (fig. 7) deux droites rectangulaires; par le point fixe O menons une transversale quelconque OC sur laquelle nous prendrons $OA_1 = BC$ $(= OA'_1)$. La courbe de Barrow est le lieu des points A_1 et A'_1. M. Aubry l'a appelée *cappa* à cause de sa ressemblance avec cette lettre grecque.

Menons Ox parallèle à BZ et A_1O_1 perpendiculaire à OA_1; les triangles OBC, O_1A_1O étant égaux, on a $A_1O_1 = OA$. D'où une autre définition du cappa que R. de Sluse, dans une lettre à Huygens du 18 avril 1662, attribue à G. de Gutschoven, élève de Descartes; de Sluse construit la tangente à la courbe. Newton indique le tracé continu du cappa au moyen d'une équerre dont un côté indéfini OA_1 pivote sur un point fixe O, tandis qu'un point déterminé O_1 de l'autre côté parcourt une droite Ox; le sommet A_1 décrit la courbe.

Le cappa a pour équation polaire

$$r = a \cot \theta,$$

et pour équation cartésienne

$$y^2(x^2 + y^2) = a^2x^2, \qquad \text{ou} \qquad x^2 = \frac{y^4}{a^2 - y^2};$$

nous écrivons a au lieu de a_1 pour la constante $OB = A_1O_1$. Il est symétrique par rapport aux axes coordonnés; comme les deux branches se touchent en O, ce point peut être appelé un

nœud de contact; la droite BZ et sa symétrique B'Z' par rapport à Ox sont des asymptotes.

La courbe est le lieu des points de contact des tangentes menées de O aux cercles de rayon a qui ont leurs centres sur Ox.

21. Le centre instantané I est à l'intersection des perpendiculaires élevées en O sur OA_1, et en O_1 sur OO_1. On a

$$OI = OO_1 : \cos IOO_1 = O_1A_1 : \cos^2 IOO_1,$$

d'où l'équation de la trajectoire de I dans le plan P

$$r = \frac{a}{\cos^2\theta}.$$

Semblablement

$$O_1I = OO_1 \operatorname{tg} IOO_1 = \frac{O_1A_1}{\cos IOO_1} \operatorname{tg} IOO_1,$$

de sorte que le lieu de I dans le plan P_1 a pour équation

$$r = -\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}, \quad \text{ou} \quad x^2 = -ay.$$

Les deux courbes sont les mêmes que dans le mouvement (a, o), ce qui s'explique aisément.

22. Appelons Δ la circonférence de centre O et de rayon a, ε le cappa considéré jusqu'ici et ε' la même courbe tournée de $\frac{\pi}{2}$ autour de O; le point A_1'' de ε situé sur OI viendra se placer en A_1''' sur OA_1. L'équation de ε' étant $r_1 = a \operatorname{tg}\theta$, on a $rr_1 = a^2$.

Ainsi, *les courbes* ε, ε' *sont inverses l'une de l'autre par rapport au cercle* Δ.

La droite A_1O_1 est la polaire de A_1''' par rapport à Δ; donc *l'enveloppe de cette droite est la courbe polaire réciproque de* ε' *par rapport à* Δ (*). C'est aussi l'antipodaire de ε par rapport à O.

(*) Ne serait-ce pas cette propriété qui aurait dû être l'objet de la question erronée 81 des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1844, p. 40; 1854, p. 132 et 1855, p. 248)?

L'enveloppe considérée est définie par les deux équations

$$x\cos\theta + y\sin\theta = a\cot\theta,$$

$$-x\sin\theta + y\cos\theta = -\frac{a}{\sin^2\theta},$$

d'où l'on déduit

$$x = a\frac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta}, \qquad y = -a\frac{\cos^3\theta}{\sin^2\theta}.$$

L'élimination de θ ne donne pas de résultat assez simple.

En coordonnées tangentielles on a

$$a^2u^2(u^2+v^2) = v^2, \qquad \text{ou} \qquad v^2 = \frac{a^2u^4}{1-a^2u^2}.$$

23. La trajectoire d'un point D_1 de d_1 est une conchoïde du cappa (A_1). On peut la considérer comme le lieu décrit par le sommet d'un angle constant $OD_1O_1 = \lambda$. dont un côté indéfini pivote sur un point O, tandis qu'un point déterminé O_1 de l'autre côté glisse sur une droite d passant par O. Si l'on fait $A_1D_1 = b$, $O_1D_1 = c$, l'équation polaire de cette courbe est

$$r = a\cot\theta + b, \qquad \text{ou} \qquad r = c\frac{\sin(\theta+\lambda)}{\sin\theta};$$

l'équation cartésienne est

$$y^2(x^2+y^2) = c^2(x\sin\lambda + y\cos\lambda)^2.$$

Prenons sur BZ la longueur $BH = A_1D_1$, le triangle OO_1D_1 sera égal à COH; par suite, la courbe (D_1) peut être construite au moyen de l'angle OHZ comme la courbe (A_1) au moyen de l'angle droit OBZ. Cette construction montre immédiatement que la courbe (D_1) se compose de deux branches qui ont en O même tangente HH′ et sont encore asymptotes des droites BZ, B′Z′; O est un centre. La perpendiculaire au milieu de OH rencontre BZ en un point de la courbe.

Deux points D_1, E_1, qui sont symétriques par rapport à A_1,

engendrent deux courbes différentes, qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport à BB′ et à Ox.

Les courbes (D_1) et (E_1) sont aussi appelées *cappa oblique*.

24. Les coordonnés d'un point G_1 pris sur O_1A_1 à la distance $O_1G_1 = m$, sont

$$y = m\cos\theta, \qquad x = \frac{a}{\sin\theta} - m\sin\theta;$$

on en conclut l'équation de la courbe (G_1) :

$$x^2(m^2 - y^2) = (ma - m^2 + y^2)^2.$$

Cette ligne (orthoconchoïde du cappa) a pour asymptotes les droites $y = \pm m$; elle se compose de deux branches séparées.

Pour avoir l'équation de la trajectoire d'un point quelconque F_1 de P_1, désignons par n la distance O_1F_1 et par μ l'angle A_1OF_1; les coordonnées par F_1 seront

$$y = n\cos(\theta - \mu), \qquad x = \frac{a}{\sin\theta} - n\sin(\theta - \mu).$$

Éliminons θ; il vient

$$[xy\sin\mu + \cos\mu(n^2 - y^2) - an]^2 = (n^2 - y^2)(x\cos\mu + y\sin\mu)^2.$$

Si l'on prend sur OH une longueur $OK = O_1F_1$, le triangle OO_1F_1 sera égal à COK; de là une définition de la courbe (F_1) analogue à celle du cappa.

Cette ligne se compose de deux branches qui touchent en O la droite OK; elle a pour asymptotes la parallèle à Ox par K et sa symétrique par rapport à Ox.

Appareil général (a, a_1).

25. Considérons le mouvement conchoïdal (a, a_1), a et a_1 étant inégaux et différents de zéro (pl. XI, fig. 1).

Le centre instantané de rotation I se construit comme dans les

cas particuliers précédents. Si l'on pose $OI = r$, $O_1I_1 = r_1$, $xOI = x_1O_1I_1 = \omega$, on a

$$r = \frac{AE + EO_1}{\cos\omega} = \frac{a\sin\omega + a_1}{\cos^2\omega},$$

$$r_1 = \frac{OE + EA_1}{\cos\omega} = \frac{a + a_1\sin\omega}{\cos^2\omega}.$$

Telles sont les équations polaires des courbes décrites par le point I respectivement dans le plan fixe P et dans le plan mobile P_1. En coordonnées rectangulaires on obtient

$$(x^2 - ay)^2 = a_1^2(x^2 + y^2),$$
$$(x_1^2 - a_1y_1)^2 = a^2(x_1^2 + y_1^2);$$

ou encore

$$y = \frac{ax^2 \pm a_1x\sqrt{x^2 + a^2 - a_1^2}}{a^2 - a_1^2},$$

$$y_1 = \frac{a_1x_1^2 \pm ax_1\sqrt{x_1^2 + a_1^2 - a^2}}{a_1^2 - a^2}.$$

Supposons $a > a_1$. La première courbe a un point double à l'origine O, avec deux tangentes déterminées par $\sin\omega = -\frac{a}{a_1}$; la seconde courbe est extérieure aux deux parallèles qui ont pour équation $x = \pm\sqrt{a^2 - a_1^2}$ et elle a un point isolé en O_1.

26. Cherchons la trajectoire de A_1; on pourrait l'appeler *pancappa*. Comme

$$OE = \frac{a}{\sin\theta}, \qquad EA_1 = a_1\cot\theta,$$

elle a pour équation polaire

$$r = \frac{a}{\sin\theta} + a_1\cot\theta = \frac{a + a_1\cos\theta}{\sin\theta},$$

et pour équation cartésienne

$$(y - a)^2(x^2 + y^2) = a_1^2x^2, \qquad \text{ou} \qquad x = \pm\frac{y(y - a)}{\sqrt{a_1^2 - (y - a)^2}}.$$

Cette équation met en évidence les deux asymptotes $y = a \pm a_1$.

Pour reconnaître plus aisément la nature de la courbe (A_1), nous la considérons comme le lieu des points de contact A_1, A_1' (fig. 8) des tangentes menées de O à un cercle (O_1, a_1) (*), dont le centre O_1 parcourt la droite d. Lorsque le centre s'éloigne indéfiniment sur d, les rayons O_1A_1, O_1A_1' tendent à devenir perpendiculaires à d; il en résulte que la courbe a pour asymptotes les parallèles menées à d à la distance a_1. Cependant, lorsque $a_1 = a$, l'une de ces droites coïncide avec Ox et devient le lieu des points A_1', ce qui explique que l'appareil (a, a) donne des cubiques, tandis que l'on obtient des quartiques dans le cas où a et a_1 sont différents.

Il existe deux cercles (B, a_1), (B', a_1) (**) qui touchent OA en A. Le point A est donc un point double de notre courbe, ayant pour normales les droites joignant A au quatrième sommet du rectangle construit sur OA et AB, ou sur OA et AB'.

Si $a < a_1$, on peut tracer deux circonférences (C, a_1), (C', a_1) passant par O. O est un point double ayant pour normales les rayons OC, OC'. Les cercles qui ont leur centre sur le segment CC' ne donnent pas de points réels de la courbe.

Si $a > a_1$, le point O devient un point isolé. Les points de contact T, T' des tangentes menées de O au cercle (A, a_1) appartiennent à la courbe, qui touche en ces points les rayons AT, AT'.

Voici encore une autre construction de la courbe (A_1). Dans la circonférence (A, a_1) menons un rayon quelconque AM, par l'extrémité M tirons une parallèle à d et de O abaissons une perpendiculaire sur OM; les deux dernières droites se couperont en un point A_1 de la courbe. Cette construction introduit un faisceau de droites ayant pour centre O, et un faisceau ayant pour centre le point J à l'infini sur d. Entre ces faisceaux il existe une

(*) Nous désignons par circonférence (O, R) la circonférence décrite du point O comme centre avec le rayon R.

(**) La figure ne contient pas les cercles (B, a_1), (C', a_1).

correspondance (2, 2); en effet, étant donné un rayon OA_1 du premier faisceau, en menant le diamètre MAM′ perpendiculaire à OA_1 et par ses extrémités des parallèles à d, on aura deux rayons MA_1, $M'A_1''$ du second faisceau (J) qui correspondent à OA_1; de même, étant donnée une parallèle à d qui coupe la circonférence (A, a_1) aux points M, N, les deux perpendiculaires abaissées de O sur AM, AN sont les rayons correspondants du faisceau (O). On peut conclure de là que le point d'intersection de deux rayons homologues décrit une quartique ayant pour points doubles les sommets des deux faisceaux générateurs.

La dernière définition est susceptible d'une généralisation projective : On donne dans un même plan deux faisceaux projectifs de centres O et A, un point fixe J et une conique ε par rapport à laquelle A et J sont des points conjugués; un rayon du faisceau A coupe ε en deux points P, Q; les droites JP et JQ rencontrent le rayon du faisceau (O) qui correspond au rayon PQ du faisceau (A), en deux points A_1, A_1', qui engendrent une quartique ayant pour points doubles O et J, pour tangentes en ces points, les rayons des deux faisceaux (O), (J), qui correspondent au rayon OJ considéré comme élément de l'autre faisceau. Cependant, pour compléter les conditions de la question, ajoutons que le rayon OA du faisceau (O) doit avoir pour correspondant dans le faisceau (A) la droite AJ; alors A devient un troisième point double.

Comme on a

$$a_1^2 = O_1O \cdot O_1L,$$

L désignant le milieu de la droite A_1A_1', le point L engendre une conchoïde de Sluse; la droite A_1A_1' enveloppe une parabole.

Si l'on soumet la courbe (A_1) à une inversion par rapport à un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{aa_1}$, la transformée a pour équation

$$r = \frac{aa_1 \sin\theta}{a + a_1 \cos\theta};$$

c'est donc la *courbe de Poncelet*, c'est-à-dire la projection hori-

zontale de la courbe de séparation d'ombre et de lumière dans l'épure de la vis à filets triangulaires (*).

27. Examinons maintenant la courbe décrite par un point G_1 de la droite A_1O_1 (pl. XI, fig. 1) (*orthoconchoïde du pancappa*). Les coordonnées de G_1 sont, si $G_1O_1 = b$,

$$x = \frac{a\cos\theta + a_1 - b\sin^2\theta}{\sin\theta}, \qquad y = a + b\cos\theta;$$

d'où, en éliminant θ,

$$x = \pm\frac{y^2 - ay + a_1b - b^2}{\sqrt{b^2 - (y-a)^2}}.$$

Si l'on mène par G_1 une parallèle G_1R à d_1, la courbe (G_1) est le lieu du sommet d'un angle droit RG_1O_1 dont un côté indéfini est tangent à une circonférence fixe $(O, a_1 - b)$ et dont un point déterminé O_1 de l'autre côté parcourt une droite d.

Cherchons encore la trajectoire d'un point F_1 de d_1 (*pancappa oblique*). Si l'on fait $A_1F_1 = b$, l'équation polaire de la courbe est

$$r = \frac{a + a_1\cos\theta + b\sin\theta}{\sin\theta},$$

et l'équation cartésienne,

$$(y-a)^2(x^2+y^2) = (a_1x + by)^2.$$

La courbe (F_1) est le lieu décrit par le sommet d'un angle constant OF_1O_1 dont un côté, indéfini, pivote sur un point fixe et dont un point déterminé O_1 de l'autre côté parcourt une droite d. On peut aussi l'engendrer au moyen de deux faisceaux (O) et (J), J étant le point à l'infini sur d. On joint un point

(*) Les cercles (O_1, a_1) touchent deux parallèles à d, celles-ci se transforment par inversion en deux cercles qui se touchent en O; par suite, étant donnés deux cercles tangents en O, les points de contact des tangentes menées de O aux cercles qui touchent les deux premiers cercles, sont une courbe de Poncelet. Les cercles variables ont leurs centres sur une conique et coupent orthogonalement le cercle transformé de la droite d.

quelconque M de la circonférence (A, O_1F_1) aux points A et J; AM coupe en N la circonférence du segment capable de l'angle OFO_1 décrit sur AO; ON et MJ sont des éléments correspondants des faisceaux (O) et (J).

Voici une autre définition de la courbe (F_1) : Sur la droite OO_1 qui joint O à un point quelconque O_1 de d, on décrit la circonférence du segment capable de l'angle constant OF_1O_1, et l'on y inscrit deux cordes de longueur constante O_1F_1 et O_1F_1'. Les circonférences auxiliaires forment un faisceau, car elles passent par O et par le pied H de l'oblique OH menée vers d sous l'angle OF_1O_1.

28. La droite A_1O_1 a pour équation

$$x\cos\theta + y\sin\theta = \frac{a + a_1\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Si l'on pose $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$, on obtient

$$(a - a_1)t^4 + 2xt^3 + 2(a - 2y)t^2 - 2xt + a + a_1 = 0;$$

t entrant au quatrième degré, l'enveloppe de la droite A_1O_1 est de la quatrième classe.

En identifiant l'équation avec $ux + vy + 1 = 0$, on trouve

$$\frac{\cos\theta}{u} = \frac{\sin\theta}{v} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = -\frac{a + a_1\cos\theta}{\sin\theta};$$

l'élimination de θ est facile, elle donne

$$a_1^2u^2(u^2 + v^2) = [a(u^2 + v^2) + v]^2.$$

Appareil à projection constante.

29. Le curvigraphe Lebeau réalise le mouvement suivant d'un plan P_1 sur un plan fixe P :

Soient d_1, e_1 (fig. 9) deux droites données de P_1, A_1 leur inter-

section. Le plan P_1 se déplace de manière que d_1 pivote sur un point fixe O et que la projection sur une droite fixe d, faite parallèlement à une droite fixe Oy, du segment A_1O_1 de e_1 compris entre A_1 et d, ait une longueur constante $Q'O_1 = 2p$. La construction de l'instrument permet de varier les paramètres, à savoir :

L'angle de d_1 avec e_1, que nous désignerons par λ, et qui peut même être nul ou égal à π;

L'angle xOy compris entre Oy et une parallèle Ox à d; nous le représenterons par ω;

Le segment $OA = a$ de Oy compris entre O et d;

Enfin la constante $2p$.

Dans les appareils étudiés précédemment, le segment A_1O_1 était constant; dans l'appareil actuel, c'est la projection de A_1O_1 sur d, faite parallèlement à une direction fixe, qui reste constante.

Parabolographe ($\omega = \lambda$).

30. Examinons d'abord le cas où $\lambda = \omega = \frac{\pi}{2}$, $a = o$. Nous avons alors un angle droit OA_1O_1 (fig. 10) dont un côté, indéfini, pivote sur un point fixe O, tandis que le segment A_1O_1 de l'autre côté compris entre le sommet et une droite fixe Ox se projette orthogonalement sur cette droite suivant une longueur constante $QO_1 = 2p$.

La relation $A_1Q^2 = OQ \cdot QO_1$ ou $y^2 = 2px$ montre immédiatement que le point A_1 décrit une parabole.

Le centre instantané I de rotation de l'angle droit OA_1O_1 est à l'intersection de la perpendiculaire élevée en O sur OA_1 avec la normale à la parabole, qui passe au milieu M de QO_1.

Cherchons le lieu de ce point dans les deux plans P, P_1. Si α, β sont les coordonnées de A_1, l'équation de la première courbe s'obtient en éliminant α, β entre les égalités

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x, \qquad y - \beta = -\frac{\beta}{p}(x - \alpha), \qquad \beta^2 = 2p\alpha;$$

des deux premières relations on déduit d'abord $x = 2(\alpha + p)$, ensuite

$$\alpha = \frac{1}{2}(x - 2p), \qquad \beta = -\frac{1}{2}\frac{x(x-2p)}{y};$$

d'où l'on conclut l'équation du lieu de I dans le plan P :

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{x-2p}{p}}, \qquad \text{ou} \qquad r = 2p\frac{1+\sin^2\theta}{\cos^3\theta}.$$

Cette courbe est formée d'une branche parabolique ayant pour sommet le point $(2p, 0)$; O en est un point isolé.

Soient x, y les coordonnées de I par rapport aux axes A_1O, A_1O_1 du plan P_1; on a $x = A_1O = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $y = OI$. Des triangles semblables donnent

$$\frac{OI}{A_1O_1} = \frac{OM}{MO_1} = \frac{\alpha + p}{p}, \qquad \frac{A_1O_1}{A_1O} = \frac{QO_1}{A_1Q} = \frac{2p}{\beta},$$

d'où par multiplication

$$\frac{y}{x} = \frac{2(\alpha + p)}{\beta};$$

il suffit maintenant d'éliminer α et β entre les équations

$$x^2 = \alpha^2 + \beta^2, \qquad \beta y = 2x(\alpha + p), \qquad \beta^2 = 2p\alpha.$$

On trouve ainsi pour la courbe (I) dans le plan P_1 :

$$p^2y^4 - 4p^2y^2(p^2 + x^2) - 4x^2(p^2 + x^2)^2 = 0,$$

ou

$$py^2 = 2(p^2 + x^2)(p + \sqrt{p^2 + x^2}).$$

Cette ligne est une sextique composée de deux branches paraboliques qui sont chacune symétrique par rapport à A_1O_1, et symétriques l'une de l'autre par rapport à A_1O; A_1 en est un point isolé.

31. Un point F_1 de OA_1 décrit une conchoïde de parabole représentée par

$$r = \frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta} + b, \quad \text{ou} \quad (x^2+y^2)(y^2-2px)^2 = b^2y^4.$$

Cherchons la trajectoire d'un point G_1 situé à une distance constante $O_1G_1 = b$ du point O_1. Si x, y sont les coordonnées de G_1 et α, β celles de A_1, on a $HO_1 = \sqrt{b^2-y^2}$, et par suite

$$x = \alpha + 2p - \sqrt{b^2-y^2}, \quad \frac{y}{\beta} = \frac{\sqrt{b^2-y^2}}{2p}, \quad \beta^2 = 2p\alpha;$$

d'où en éliminant α et β,

$$[x(b^2-y^2) - 2pb^2]^2 = (b^2-y^2)^5.$$

La courbe est du 6e degré; elle a pour asymptotes les droites $y = \pm b$.

Si la distance A_1G_1 reste constante et égale à c, le triangle rectangle OA_1G_1 donne

$$x^2+y^2 = \alpha^2+\beta^2+c^2 = \alpha^2+2p\alpha+c^2,$$

d'où

$$\alpha = -p + \sqrt{p^2+x^2+y^2-c^2}.$$

Des triangles semblables A_1KG_1, A_1QO_1 on déduit

$$\frac{\beta-y}{x-\alpha} = \frac{\beta}{2p},$$

d'où

$$\beta = \frac{2py}{2p-x+\alpha} = \frac{2py}{p-x+\sqrt{p^2+x^2+y^2-c^2}}.$$

En substituant les valeurs de α et β dans la relation $\beta^2 = 2p\alpha$, on obtient une équation du sixième degré en x et y.

La droite A_1O_1 a pour équation

$$x\cos\theta + y\sin\theta = \frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

ou, en posant $\operatorname{tg}\theta = t$,

$$yt^3 + (x - 2p)t^2 - 2p = 0;$$

on en déduit pour l'enveloppe de A_1O_1 :

$$y^2 = \frac{2}{27p}(x - 2p)^3.$$

Cette courbe est donc une parabole semi-cubique ayant un rebroussement au point $(2p, O)$.

32. Supposons maintenant un angle droit OA_1O_1 (fig. 11), dont le côté OA_1 pivote sur O de manière que le segment A_1O_1 de l'autre côté, compris entre A_1 et une droite fixe d, se projette orthogonalement sur d suivant une longueur constante $2p$.

Les triangles semblables $A_1Q'O_1$, OQA_1 donnent, si l'on fait $OA = a$,

$$y(y - a) = 2px, \qquad \text{ou} \qquad \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 2p\left(x + \frac{a^2}{8p}\right).$$

On voit que le point A_1 décrit encore une parabole de paramètre $2p$ et de sommet $\left(-\frac{a^2}{8p}, \frac{a}{2}\right)$. L'axe de la courbe est donc la parallèle à d menée par le milieu L de OA; O et A sont deux points de la courbe. Pour construire le sommet O', on peut prendre $LF = 2p$, puis mener OO' perpendiculaire à OF; en effet, si l'on mène O'G parallèle à OF, OO'G est une position particulière de l'angle mobile OA_1O_1.

Ce résultat conduit à ce théorème assez curieux :

Étant donnés sur une parabole deux points O, A *symétriques par rapport à l'axe, si en un point quelconque* A_1 *de la courbe on élève sur la droite* OA_1 *une perpendiculaire qui rencontre en* O_1 *le diamètre passant par* A, *la projection de* A_1O_1 *sur l'axe est égale au paramètre* 2p.

33. Considérons le cas où les angles xOy, OA_1O_1 ont

même valeur ω (fig. 12). Si OA_1 coupe d en C, les triangles semblables $A_1Q'O_1$, CA_1O_1 donnent

$$A_1O_1^2 = O_1Q' \cdot O_1C = O_1Q'\left(O_1Q' + \frac{OQ \cdot A_1Q'}{A_1Q}\right),$$

ou

$$4p^2 + (y-a)^2 - 4p(y-a)\cos\omega = 2p\left[2p + \frac{x(y-a)}{y}\right],$$

équation qui se réduit à

$$y^2 - ay - 4py\cos\omega = 2px.$$

Si l'on fait $a + 4p\cos\omega = a'$, on peut écrire

$$\left(y - \frac{a'}{2}\right)^2 = 2p\left(x + \frac{a'^2}{8p}\right).$$

La trajectoire de A_1 est donc encore une parabole dont les diamètres sont parallèles à Ox. La courbe rencontre Oy en O et en un point E qu'on obtient en prenant sur d le segment $AD = 2p$, et en décrivant un arc de cercle (D, $2p$) qui coupe Oy en E; car OED est une position de l'angle mobile OA_1O_1; d'ailleurs, on peut vérifier que $OE = a + 4p\cos\omega = a'$. Soit Lx' le diamètre passant au milieu L de OE; la tangente $O'y'$ en son extrémité O' est parallèle à Oy. Pour obtenir le point O', joignons DL, construisons l'angle $DLK = \omega$, menons OO' parallèle à KL, O'G parallèle à LO; OO'G est une position de l'angle mobile OA_1O_1.

L'équation de la courbe (A_1) par rapport aux axes $O'x'$, $O'y'$ est $y^2 = 2px$. Étant donnés le diamètre $O'x'$, la tangente $O'y'$ et le paramètre $2p$ relatif à ce diamètre, proposons-nous de construire la parabole au moyen du curvigraphe. On peut se donner arbitrairement la ligne d parallèle à $O'x'$, prendre $HG = 2p$, et construire l'angle $GO'F = y'O'x'$; le point O doit se trouver sur le second côté de cet angle. La circonférence (G, $2p$) coupe $O'x'$ n H et en un second point V; prenons $O'N = VO'$ et la parallèle Nx à $O'x'$ déterminera le point O; en effet, les constructions qu'on vient d'effectuer contre la ligne Ny' reproduisent dans un autre ordre celles qui ont été effectuées tantôt contre Oy.

Si l'on prend pour d le diamètre $O'x'$ lui-même, il suffira de prendre $O'W = 2p$, de décrire un arc de cercle $(W, 2p)$ qui coupera $O'y'$ en B; O sera le symétrique de B par rapport à $O'x'$.

Hyperbolographe ($\omega \gtrless \lambda$).

34. Passons au cas le plus général (fig. 9).

Les coordonnées de A_1 étant $OQ = x$, $QA_1 = y$, et les angles OA_1Q, QA_1R étant désignés par λ_1, λ_2, les triangles OA_1Q, $Q'A_1O$ donnent

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin \lambda_1}{\sin(\omega - \lambda_1)}, \qquad \frac{2p}{y - a} = \frac{\sin \lambda_2}{\sin(\omega + \lambda_2)};$$

d'où

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = \frac{x \sin \omega}{y + x \cos \omega}, \qquad \operatorname{tg} \lambda_2 = \frac{2p \sin \omega}{y - a - 2p \cos \omega}.$$

Substituons ces valeurs dans la formule

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{tg} \lambda_1 + \operatorname{tg} \lambda_2}{1 - \operatorname{tg} \lambda_1 \operatorname{tg} \lambda_2};$$

il vient, tous calculs faits,

$$y^2 \sin \lambda + xy \sin(\lambda - \omega) - y[a \sin \lambda + 2p \sin(\lambda + \omega)] - x[2p \sin \lambda + a \sin(\lambda - \omega)] = 0.$$

Telle est l'équation de la trajectoire de A_1. On peut vérifier qu'elle donne les cas particuliers examinés ci-dessus.

Nous voyons que la courbe n'est une parabole que lorsque $\lambda = \omega$; si ces angles sont inégaux, elle est une hyperbole. On peut transformer la question de manière à déterminer aisément les éléments principaux de cette hyperbole. En effet, si l'on prend sur d le segment $AD = Q'O_1 = 2p$ (fig. 13) et qu'on mène par D à O_1A_1 une parallèle qui rencontre OA_1 en n et Oy en m, le point n appartient à la circonférence du segment capable de l'angle λ décrit sur OD, et mA_1 est parallèle à d. D'après cela,

pour construire la courbe (A_1), on joindra O et D à un point quelconque n de la circonférence Δ, et par le point m, où Dn coupe Oy, on tirera une parallèle mA_1 à d; le point de rencontre des droites On, mA_1 engendrera la courbe. Donc, si l'on appelle J le point à l'infini sur d, la courbe (A_1) résulte de deux faisceaux projectifs de rayons, de sommets O et J. Elle passe par ces sommets et y touche les homologues de la droite OJ considérée comme élément de l'autre faisceau. Or, lorsque OA_1 coïncide avec Ox, n vient en F, et m devient le point de rencontre H de FD et Oy; donc la parallèle à Ox par H est une asymptote. Ensuite, lorsque mA_1 coïncide avec Ox, Dn se confond avec DO, et OA_1 devient la tangente OT commune au cercle et à l'hyperbole (A_1). Pour trouver la seconde direction asymptotique, supposons mA_1 à l'infini; Dm sera remplacé par DG parallèle à Oy, OA_1 par OG, de sorte que A_1 passe à l'infini sur OG. Le symétrique de T par rapport à O appartient à l'asymptote parallèle à OG. Les points E et N sont situés sur l'hyperbole.

35. Nous n'examinerons pas ici les cas particuliers de $a = o$ avec $\lambda = \frac{\pi}{2}$ ou avec $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Une hypothèse remarquable est celle où les droites d_1 et e_1 sont superposées, le point A_1 étant un point déterminé. On a alors une droite d_1 qui pivote sur un point fixe O de manière que le segment A_1O_1 de d_1 compris entre un point déterminé A_1 de cette ligne et une droite donnée d se projette sur d suivant une longueur donnée $Q'O_1 = 2p$ (fig. 14).

Si l'on porte sur OA_1 la longueur $OB = O_1A_1$, la parallèle By' à Oy est fixe, car $RO = Q'O_1 = 2p$. On en conclut immédiatement que la trajectoire de A_1 est une hyperbole qui a pour asymptotes les droites $O'x'$, $O'y'$. Il est facile de trouver la disposition qu'il faut donner à l'instrument Lebeau pour tracer une hyperbole dont on donne les deux asymptotes et un point.

Pour terminer, je chercherai le lieu du centre instantané de rotation de la droite A_1O dans le cas d'une hyperbole équilatère. Soient (α, β) les coordonnées de O, (x_1, y_1) celles de A_1, (x, y) celles du point I, les axes coordonnés étant les asymptotes.

I est à l'intersection de la perpendiculaire élevée en O sur OA_1, avec la normale en A_1 à l'hyperbole. Ces droites sont représentées par

$$y - \beta = -\frac{x_1 - \alpha}{y_1 - \beta}(x - \alpha), \qquad y - y_1 = \frac{x_1}{y_1}(x - x_1).$$

Remplaçons y_1 par $\frac{\alpha\beta}{x_1}$; nous aurons

$$y - \beta = \frac{x_1}{\beta}(x - \alpha), \qquad y - \frac{\alpha\beta}{x_1} = \frac{x_1^2}{\alpha\beta}(x - x_1).$$

Tirons x_1 de la première équation et portons sa valeur dans la seconde; il vient

$$\alpha(x-\alpha)^3[y(y-\beta) - \alpha(x-\alpha)] = \beta(y-\beta)^3[x(x-\alpha) - \beta(y-\beta)],$$

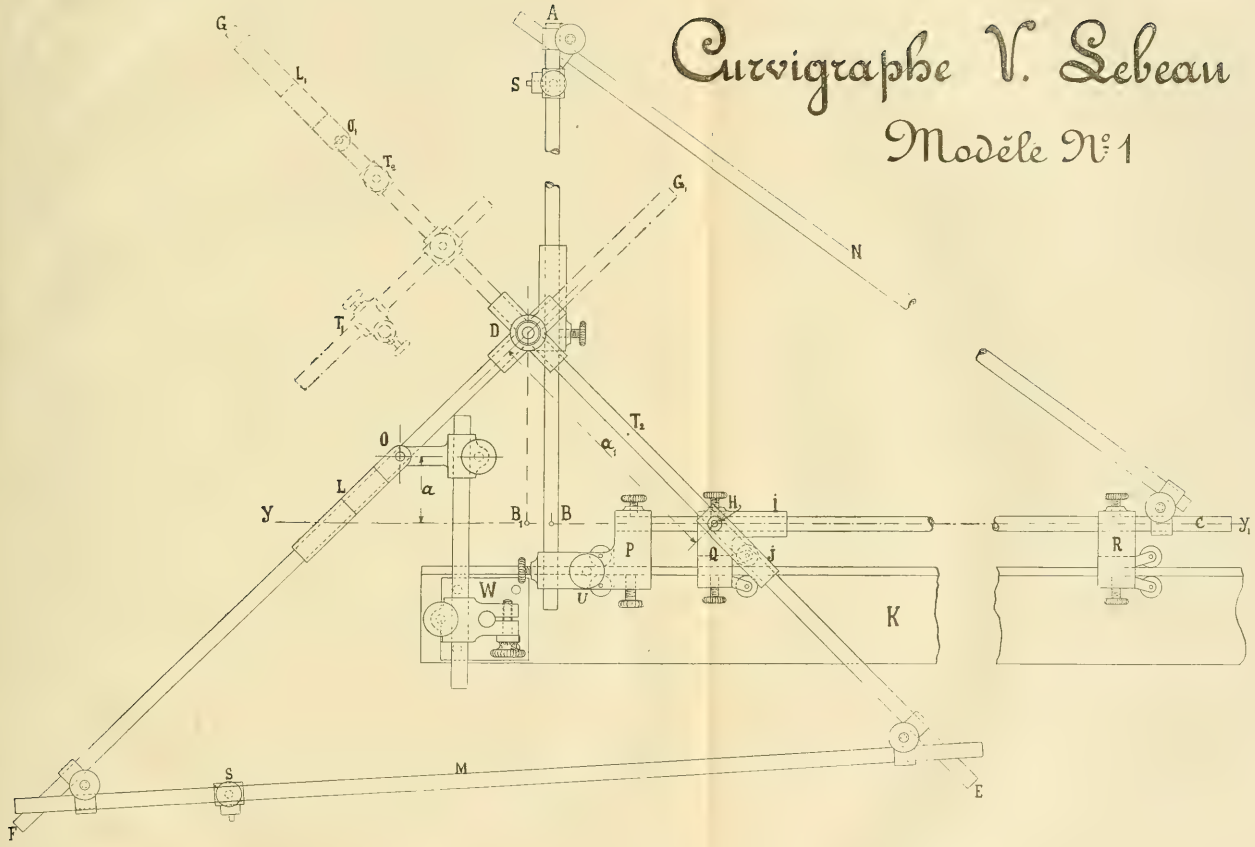
ou

$$(x-\alpha)(y-\beta)[\alpha y(x-\alpha)^2 - \beta x(y-\beta)^2] = \alpha^2(x-\alpha)^4 - \beta^2(y-\beta)^4.$$

Le lieu cherché est donc une quintique. Cependant, lorsque D est un sommet de l'hyperbole, l'équation admet le facteur $x - y$ et l'on a une quartique.

Curvigraphe V. Lebeau

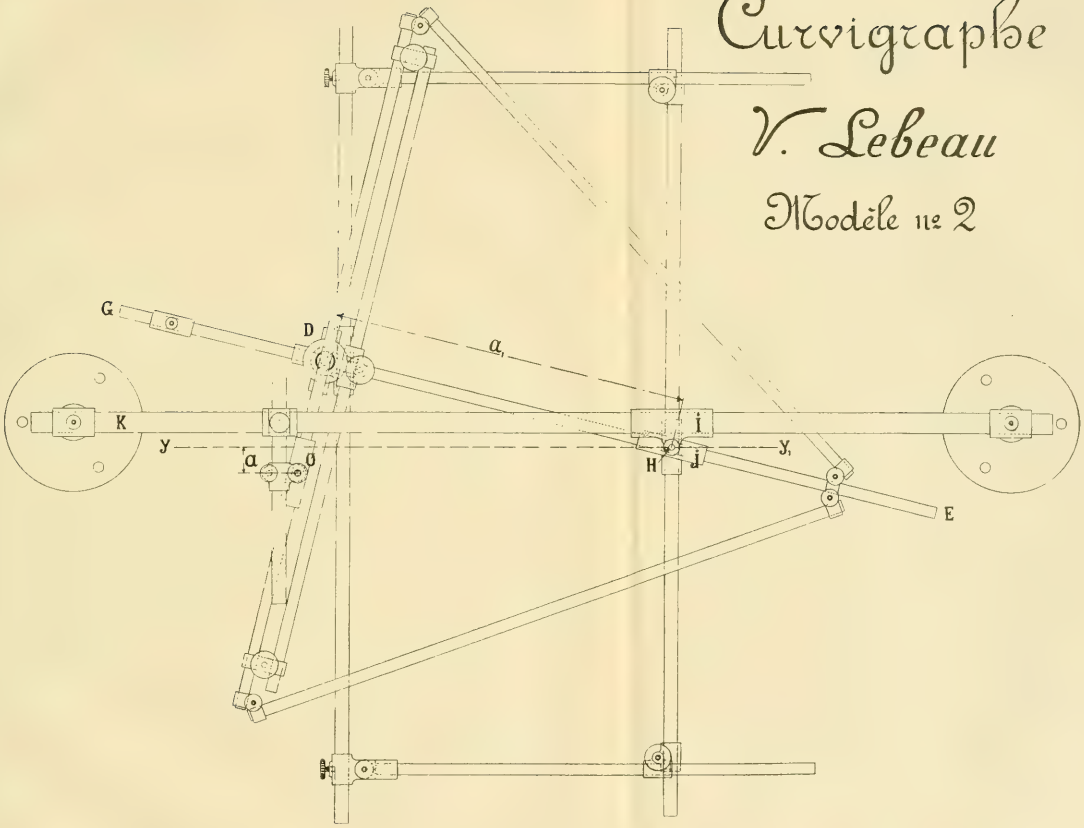
Modèle N° 1



Curvigraphe

V. Lebeau

Modèle n° 2



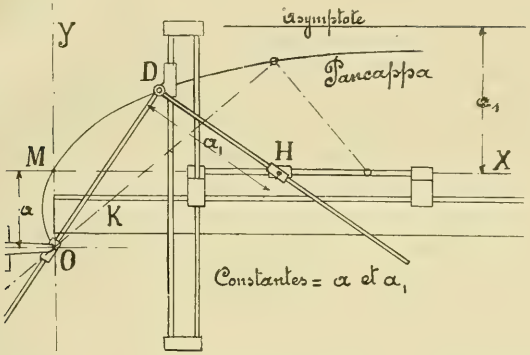


Fig. 1.

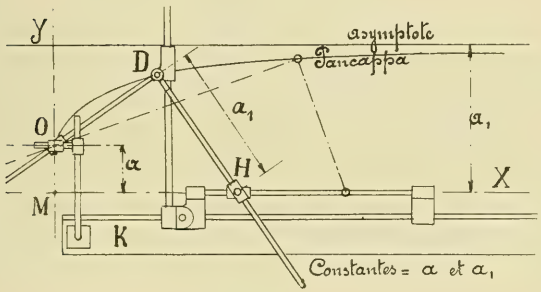


Fig. 2.

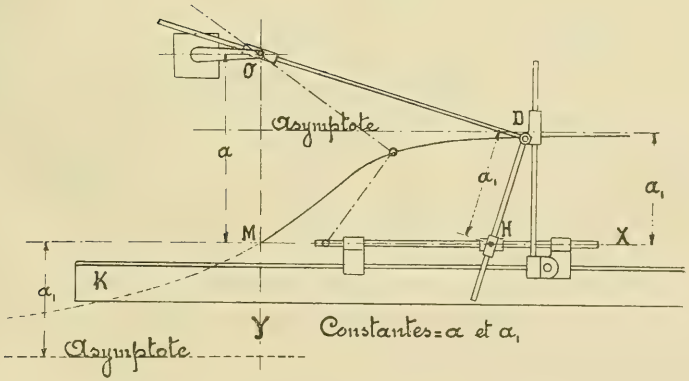


Fig. 3.

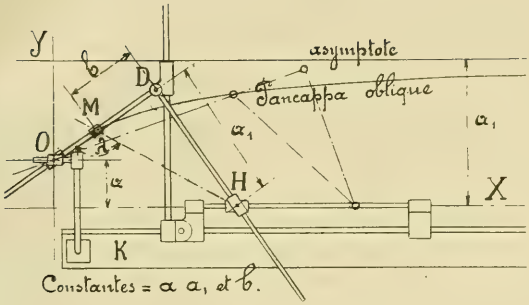


Fig. 4.

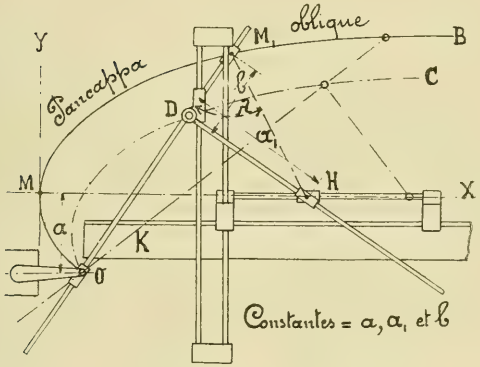


Fig. 5.

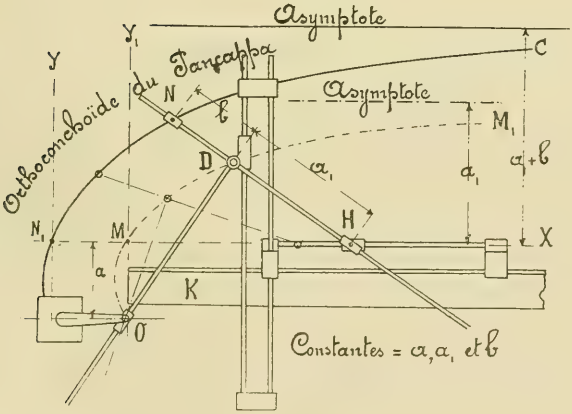


Fig. 6.

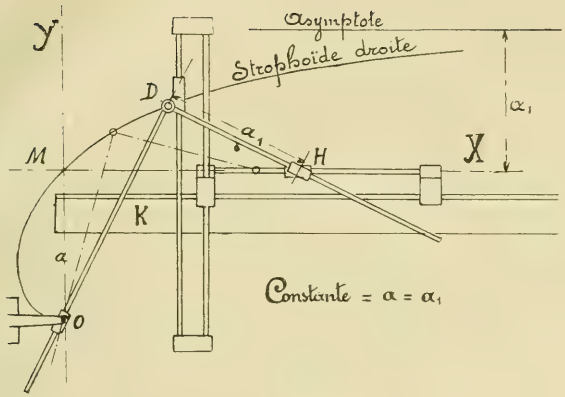


Fig. 7.

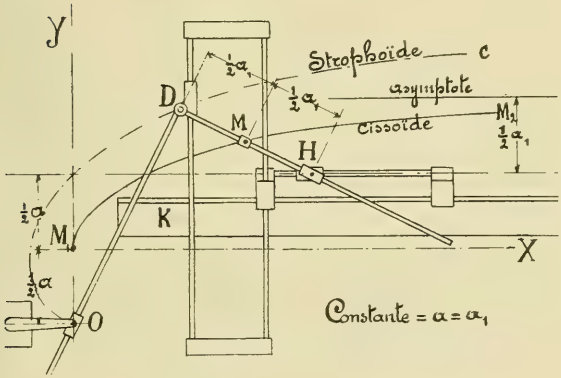


Fig. 8.

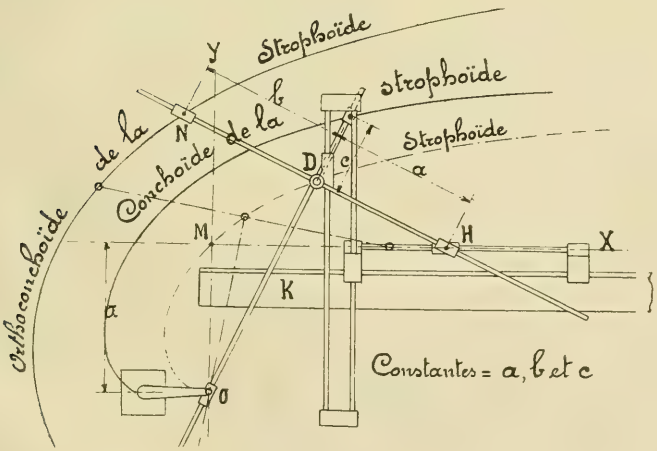


Fig. 9.

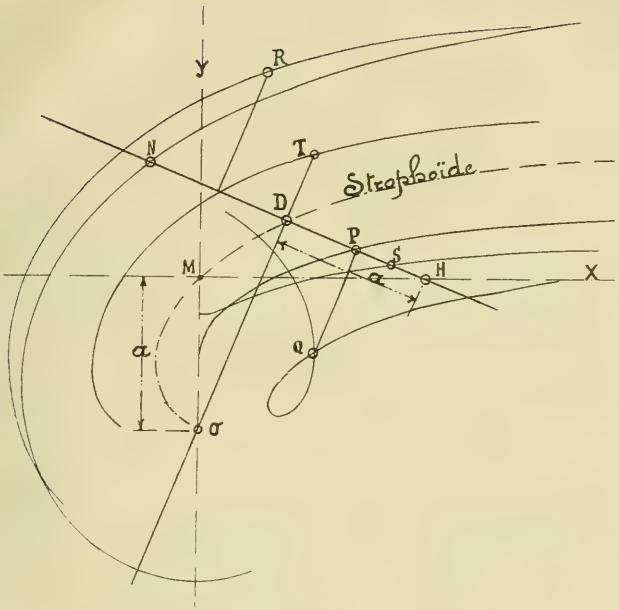
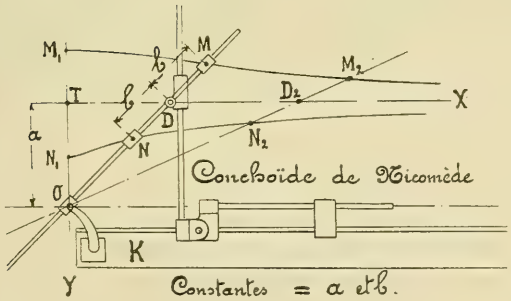


Fig. 10.

Fig. 11.



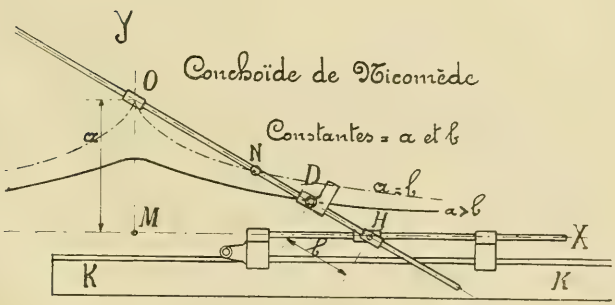


Fig. 12.

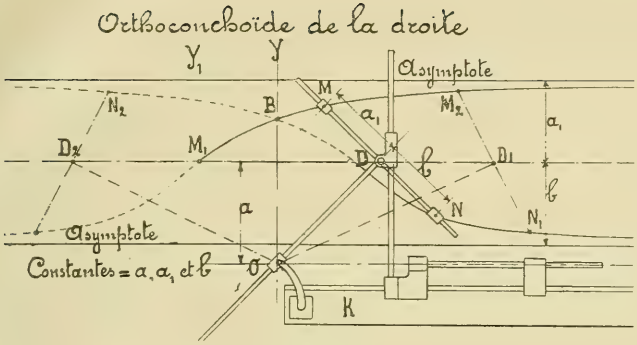


Fig. 13.

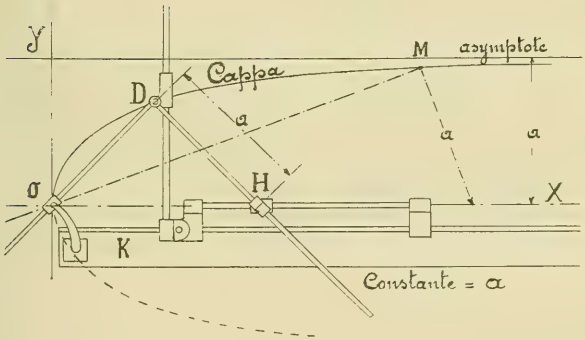


Fig. 14.

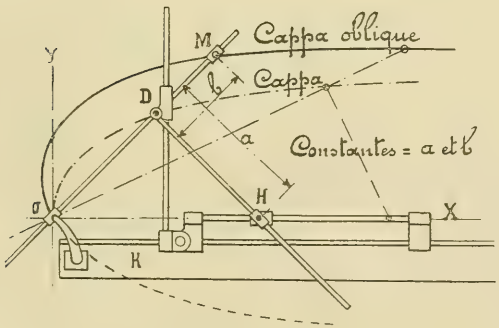


Fig. 15.

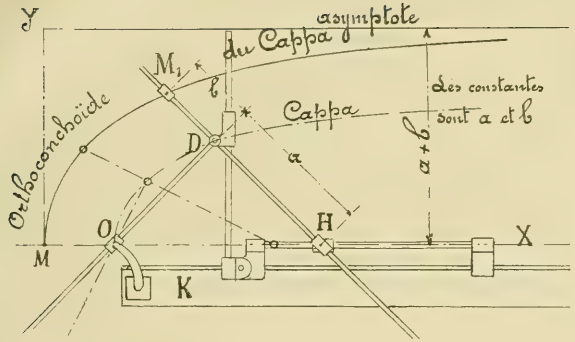


Fig. 16.

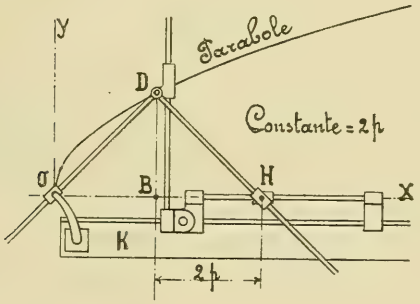


Fig. 17.

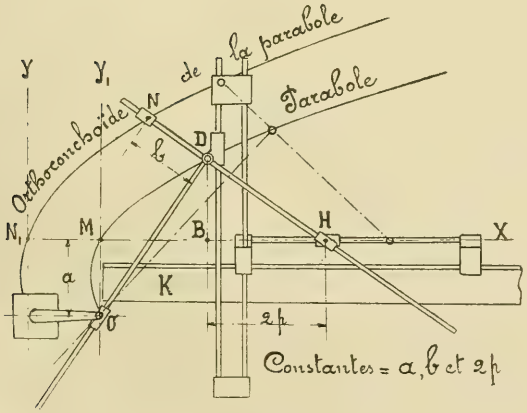


Fig. 18.

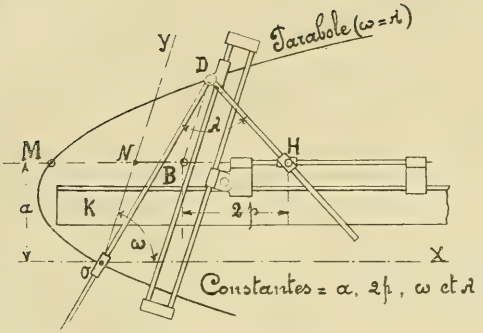


Fig. 19.

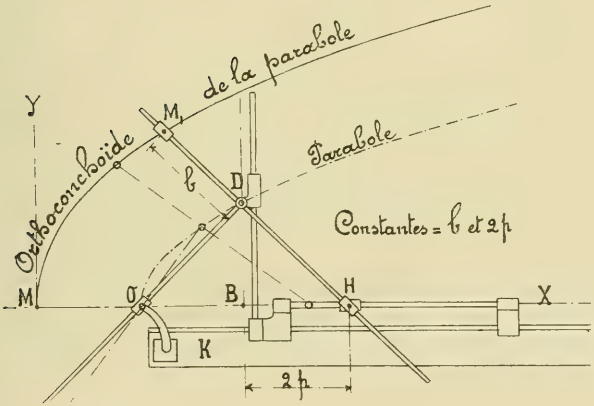


Fig. 20.

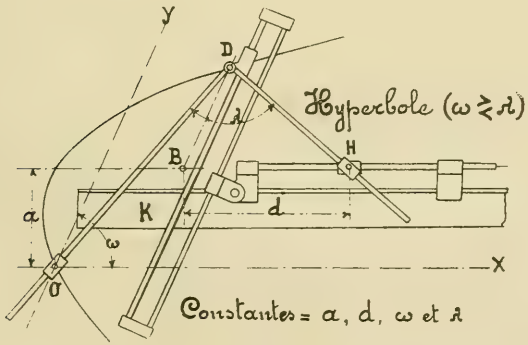


Fig. 21.

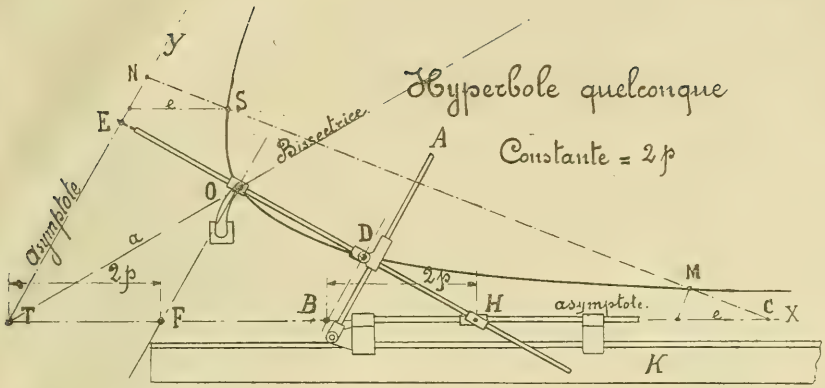


Fig. 22.

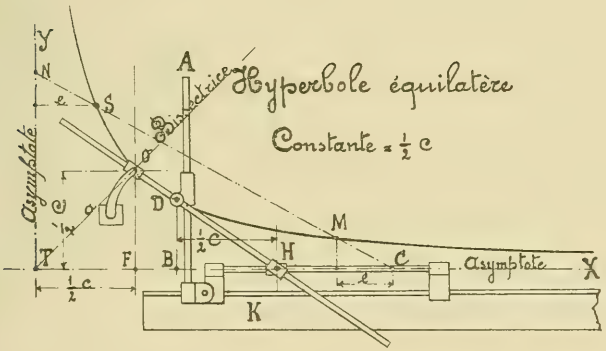


Fig. 23.

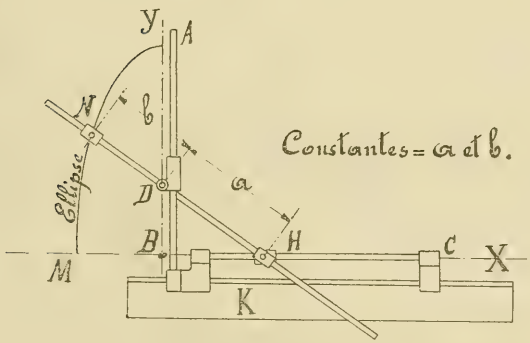


Fig. 24.

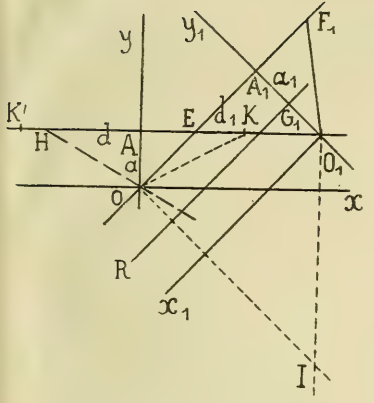


Fig. 1.

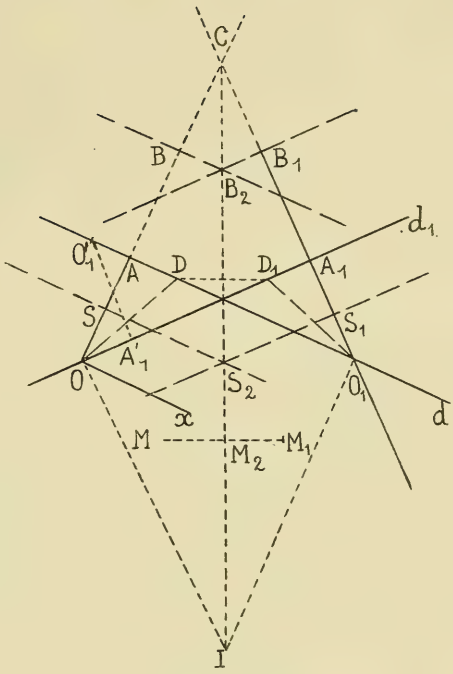


Fig. 2.

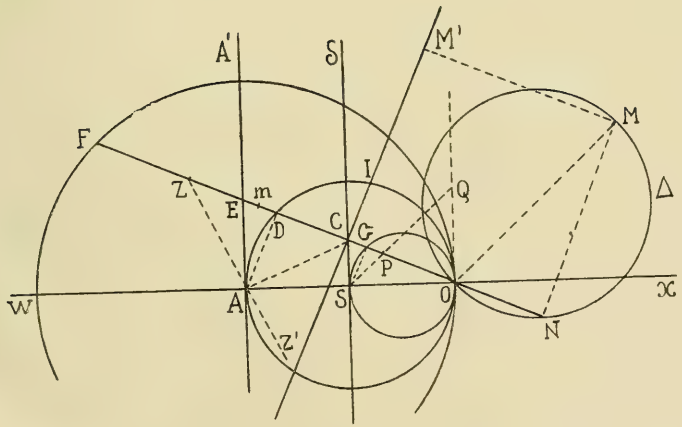


Fig. 3.

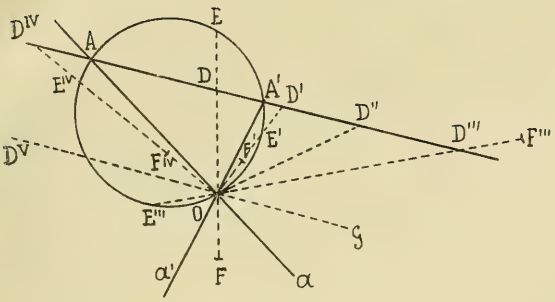


Fig. 4.

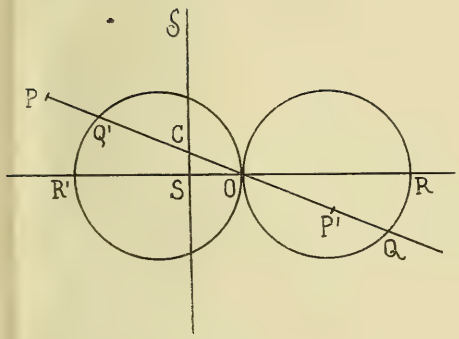


Fig. 5.

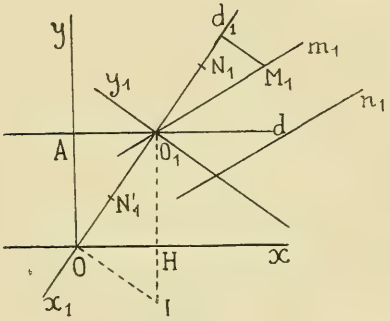


Fig. 6.

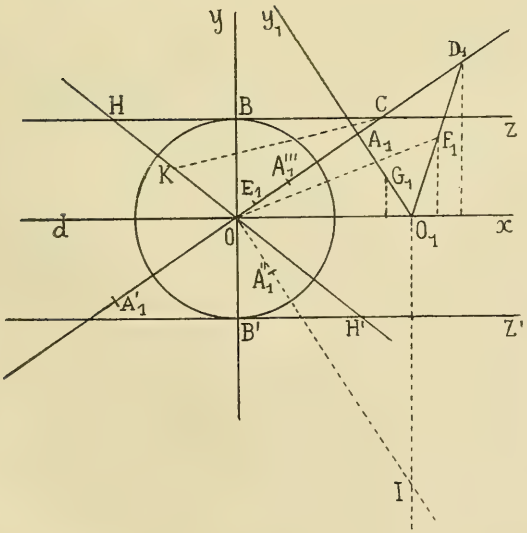


Fig. 7.

Fig. 8.

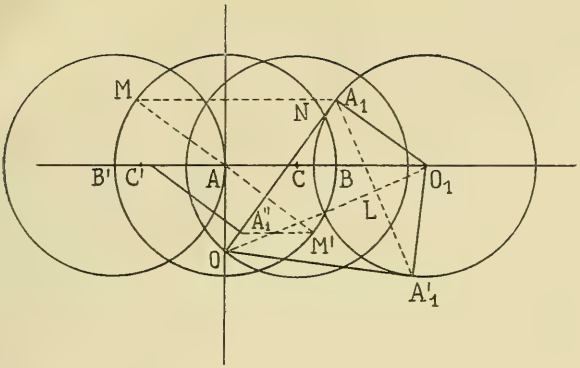


Fig. 9.

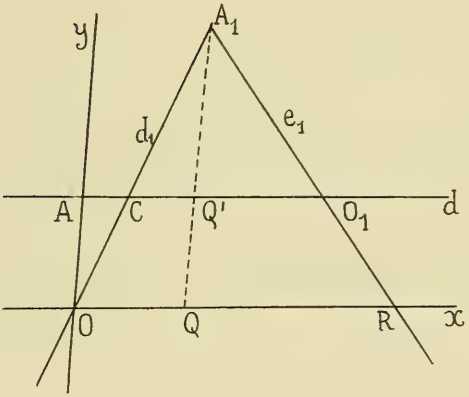


Fig. 10.

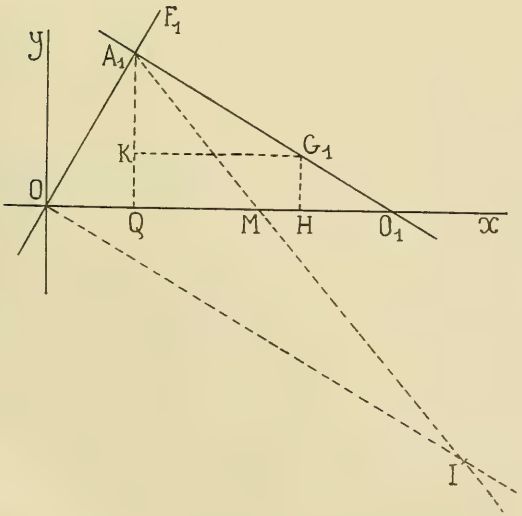


Fig. 11.

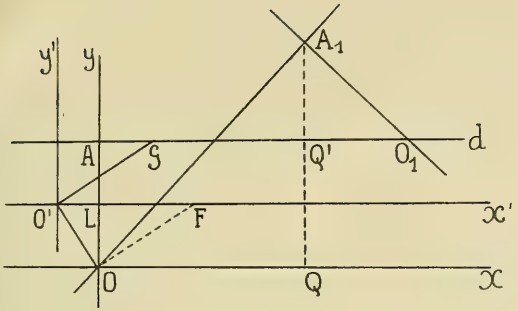
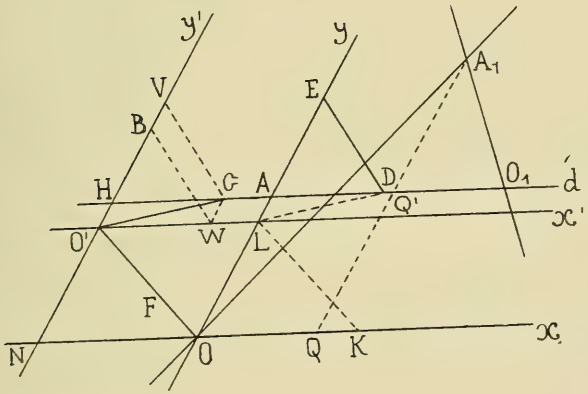


Fig. 12.



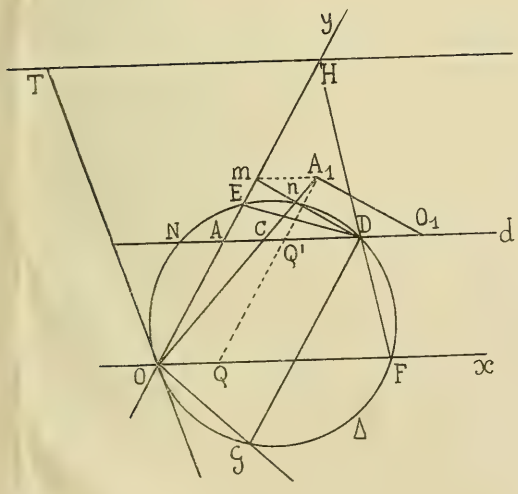


Fig. 13.

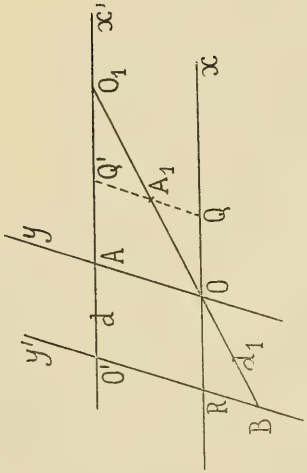


Fig. 14.

3 2044 106 293 301